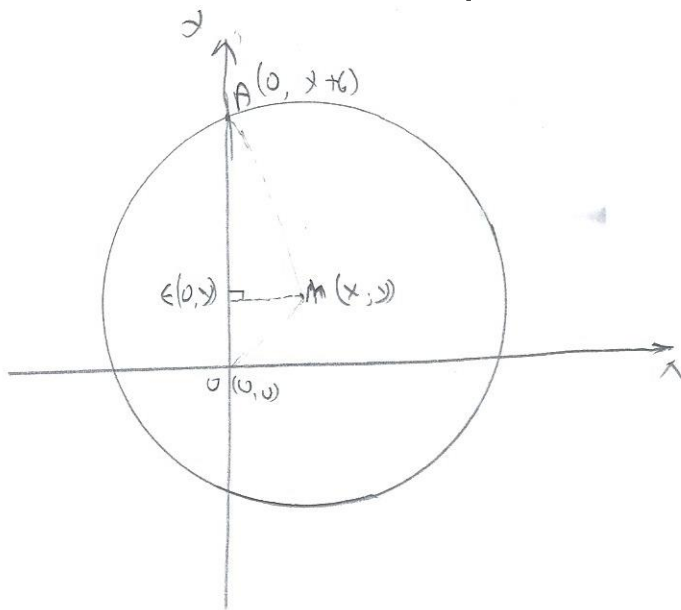


1



$$M(x, y)$$

$$E(0, y) \quad (ME \perp \text{y-axis})$$

$$\Rightarrow A(0, 6) \quad (AE = 6 \quad \text{נתון})$$

$$MO = \frac{1}{2} MA \quad \text{נתון}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 + 6^2} \quad \uparrow^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4} (x^2 + 36) \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = x^2 + 36$$

$$3x^2 + 4y^2 = 36 \quad / : 36$$

$$\boxed{\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1} \quad \underline{\underline{\text{לפי הנתון}}}$$

$$a^2 = 12$$

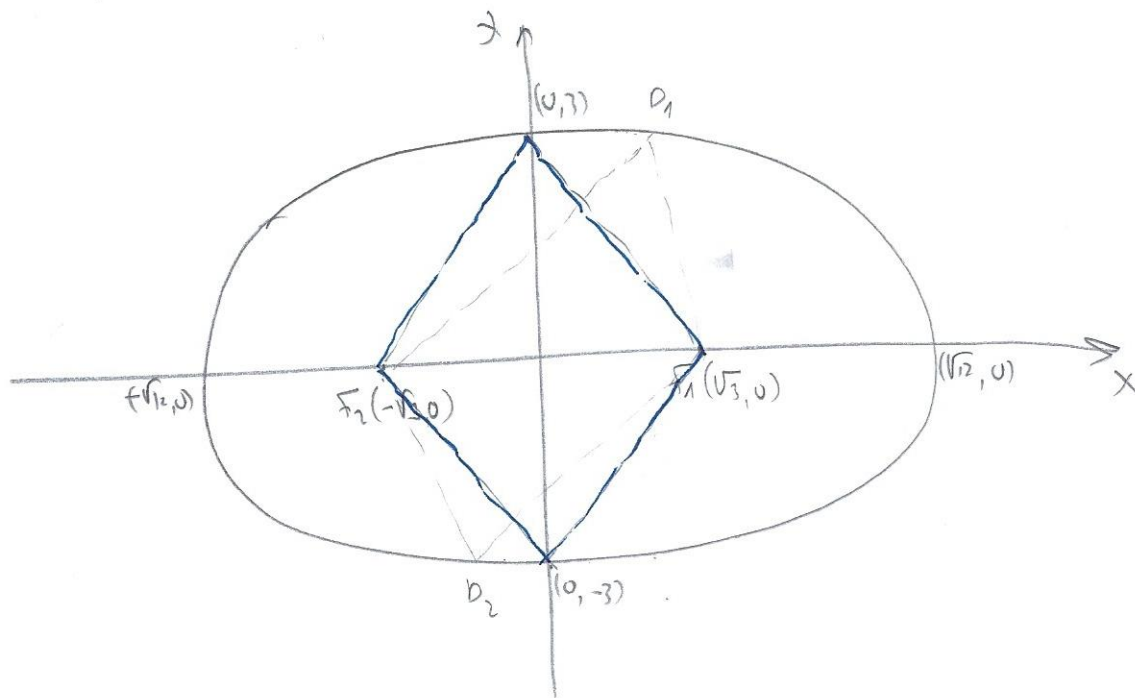
$$b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 12 - 9 = 3$$

$$c = \pm\sqrt{3}$$

$$F_1(\sqrt{3}, 0)$$

$$F_2(-\sqrt{3}, 0)$$





$$\sum_{F_1, D_1, F_2, D_2} = \sum_{D_1, F_1, D_2} + \sum_{F_2, D_2, F_1}$$

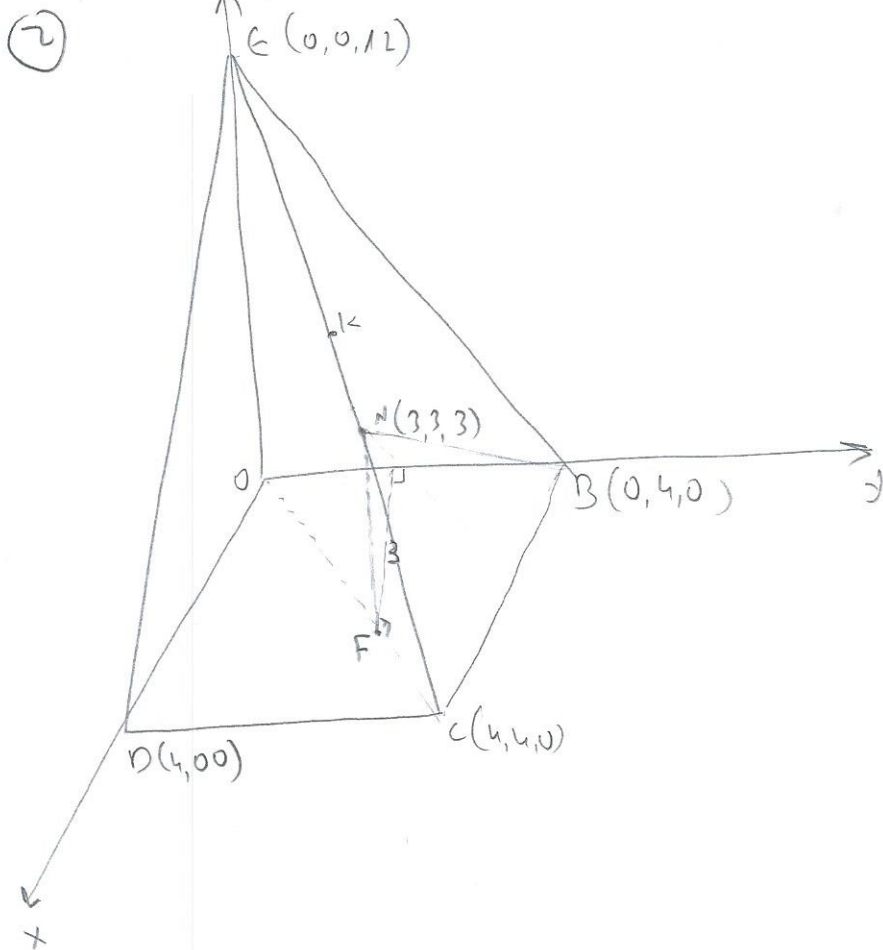
הבעיה היא שיש להשתמש בנקודה F_2 ובה F_1 כדי
 לבדוק את המרחק בין הנקודות F_1 ו- F_2 וכן
 שיהיה בדיוק זהה לנקודה D_1 ו- D_2 והוא
 האותה סך הכל.

המרחק הנקודה F_1 ו- F_2 הוא:

$$\sum_{F_1, D_1, F_2, D_2} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

חלק ב') מכיוון שיש בדיוק זהה : הנקודה
 הממוצעת היא F_1 ו- F_2 לכן
 הם קבועים ויש להם קבוע זהה.
 כלומר הם קבועים.

$$P_{\text{קבוע}} = 2\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}$$



לוקר $OB \subset D$ 1111

$OE \perp$ $OE \subset D$

$$OD = DC = CB = BO = 4$$

1111

$$\Rightarrow O(0,0,0)$$

$$B(0,4,0)$$

$$C(4,4,0)$$

$$D(4,0,0)$$

$$OE = 12 \Rightarrow E(0,0,12)$$

$$c) \vec{EC} = (4,4,-12) / 4 \Rightarrow \vec{EC} = (1,1,-3)$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{EC}: \mathcal{L} = (0,0,12) + t(1,1,-3)}$$

1111





3) נק' למזג האוויר עם הבטם בכירליזה ישרה. הא
 מכנה הולדא האטם א לולא הבטם לעיון שרבים
 הא ויבול א צה נק' למזג אלוטיו. הריבוי שטחים א

$$x_m = \frac{0+4}{2} = 2$$

$$y_m = \frac{0+4}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{(2, 2, 0)} \quad \begin{array}{l} \text{נק' למזג} \\ \text{קוטבי הריבוי} \end{array}$$

$$z_m = \frac{0+0}{2} = 0$$

אוסה הכירליזה לאורן חבטים אצם סע לאורן זאור
 בטם סין יקטר העיון א מצבה הכירליזה
 אצם (0, 0, 1) למזג סעל א

$$\boxed{l: x = (2, 2, 0) + t(1, 1, 1)} \quad \underline{\underline{\text{משוואה}}}$$

3

$$12) \quad z^3 = \bar{z} \quad z \neq 0 \quad \text{מצא את } z$$

$$z = R \operatorname{cis} \theta \quad \text{נתון}$$

$$\Rightarrow \bar{z} = R \operatorname{cis}(-\theta)$$

$$\Rightarrow (R \operatorname{cis} \theta)^3 = R \operatorname{cis}(-\theta)$$

$$\Rightarrow R^3 \operatorname{cis} 3\theta = R \operatorname{cis}(-\theta)$$

$$R^3 = R \quad \text{משוואה}$$

$$\operatorname{cis} 3\theta = \operatorname{cis}(-\theta)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R=1}$$

$$3\theta = -\theta + 360^\circ k$$

$$R=0 \quad \checkmark \quad z \neq 0$$

$$\theta = 90^\circ k$$

$$k=0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$k=1 \Rightarrow \theta = 90$$

$$k=2 \Rightarrow \theta = 180$$

$$k=3 \Rightarrow \theta = 270$$

$$z_1 = \operatorname{cis} 0 = 1$$

$$z_2 = \operatorname{cis} 90 = i$$

$$z_3 = \operatorname{cis} 180 = -1$$

$$z_4 = \operatorname{cis} 270 = -i$$

תוצאה



ד) 1. $z^2 \cdot \bar{z}^2 = 1$

$z = x + yi$

י"ד

$\bar{z} = x - yi$

$(x + yi)^2 \cdot (x - yi)^2 = 1$

$\Rightarrow [(x + yi)(x - yi)]^2 = 1 \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 1$

$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$ פ.ע.ל

$x^2 + y^2 = -1 \quad \emptyset \quad x^2 + y^2 > 0$

הנקודות הממוקמות על המעגל היחידה הן:

הכיוון של הזווית θ נקבע על ידי הסימן של $\sin \theta$

$(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$

כיוון של הזווית θ נקבע על ידי הסימן של $\sin \theta$

ע) 1. $z_1 = \text{cis } 45^\circ; \quad z_2 = \text{cis } 135^\circ; \quad z_3 = \text{cis } 225^\circ; \quad z_4 = \text{cis } 315^\circ$

$(\text{cis } 45^\circ)^4 = a$

י"ד

$\text{cis } 180^\circ = a \Rightarrow \boxed{a = -1}$ פ.ע.ל

2. $z_1 = \text{cis } \alpha \quad z_2 = \text{cis } (90^\circ + \alpha) \quad z_3 = \text{cis } (180^\circ + \alpha) \quad z_4 = \text{cis } (270^\circ + \alpha)$

$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = \text{cis } \alpha + \text{cis } (90^\circ + \alpha) + \text{cis } (180^\circ + \alpha) + \text{cis } (270^\circ + \alpha)$

$= \text{cis } \alpha + \text{cis } \alpha \cdot \text{cis } 90^\circ + \text{cis } \alpha \cdot \text{cis } 180^\circ + \text{cis } \alpha \cdot \text{cis } 270^\circ$

$= \text{cis } \alpha \cdot (1 + \text{cis } 90^\circ + \text{cis } 180^\circ + \text{cis } 270^\circ)$

$= \text{cis } \alpha (1 + i - 1 - i) = \text{cis } \alpha \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

פ.ע.ל



דיון ב'

בתווך - השליש מהזווית סדרה הנדסית - שאיננה הסתם
בה $q_1 = \text{cis } \alpha$! $q = \text{cis } 90$

$$S_n = \frac{\text{cis } \alpha [(\text{cis } 90)^4 - 1]}{q - 1} = \frac{\text{cis } \alpha (\text{cis } 360 - 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{\text{cis } \alpha (1 - 1)}{q - 1} = \underline{\underline{0}}$$

$$4) \quad f(x) = \frac{e^{ax} - e^x}{e^{ax} - 3e^x + 2}$$

582 2019 חו"ל

$$x = \ln 2 \quad \text{זוהי נקודת סיבוב}$$

$$\Rightarrow e^{a \ln 2} - 3e^{\ln 2} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow e^{\ln 2^a} - 3e^{\ln 2} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2^a - 3 \cdot 2 + 2 = 0 \Rightarrow 2^a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} = \frac{e^x(e^x - 1)}{(e^x - 1)(e^x - 2)}$$

הצטמצם

$$(e^x - 1)(e^x - 2) \neq 0$$

$$e^x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

כדי שהמכנה לא יהיה 0 נדרש $x \neq 0$
ולכן נשא

$$\frac{e^x \cancel{(e^x - 1)}}{\cancel{(e^x - 1)}(e^x - 2)} = \frac{e^x}{e^x - 2} \quad \leftarrow x=0 \quad f(0) = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\boxed{(0, -1) \text{ נקודה}}$$

$$e^x \neq 2 \Rightarrow x \neq \ln 2$$

נכפול

$$\boxed{\begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq \ln 2 \end{matrix}}$$

הצטמצם

$$\boxed{f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}}$$

←

ע) 1.

אנליזה של גבולות

לחון $x = \ln 2$ ה.ה.ה.ה.ה.

אנליזה של גבולות

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x - 2} = \frac{e^\infty}{e^\infty - 2} = \frac{e^\infty}{e^\infty} = 1$$

↑
נ/נ

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \infty \\ y &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x - 2} = \frac{e^{-\infty}}{e^{-\infty} - 2} = \frac{\frac{1}{e^\infty}}{\frac{1}{e^\infty} - 2} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$\begin{aligned} x &\rightarrow -\infty \\ y &= 0 \end{aligned}$$

2

אנליזה של גבולות

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 2) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x - 2)^2}$$

$x \text{ פר } e^x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ פר ה.ה.ה.ה.ה.

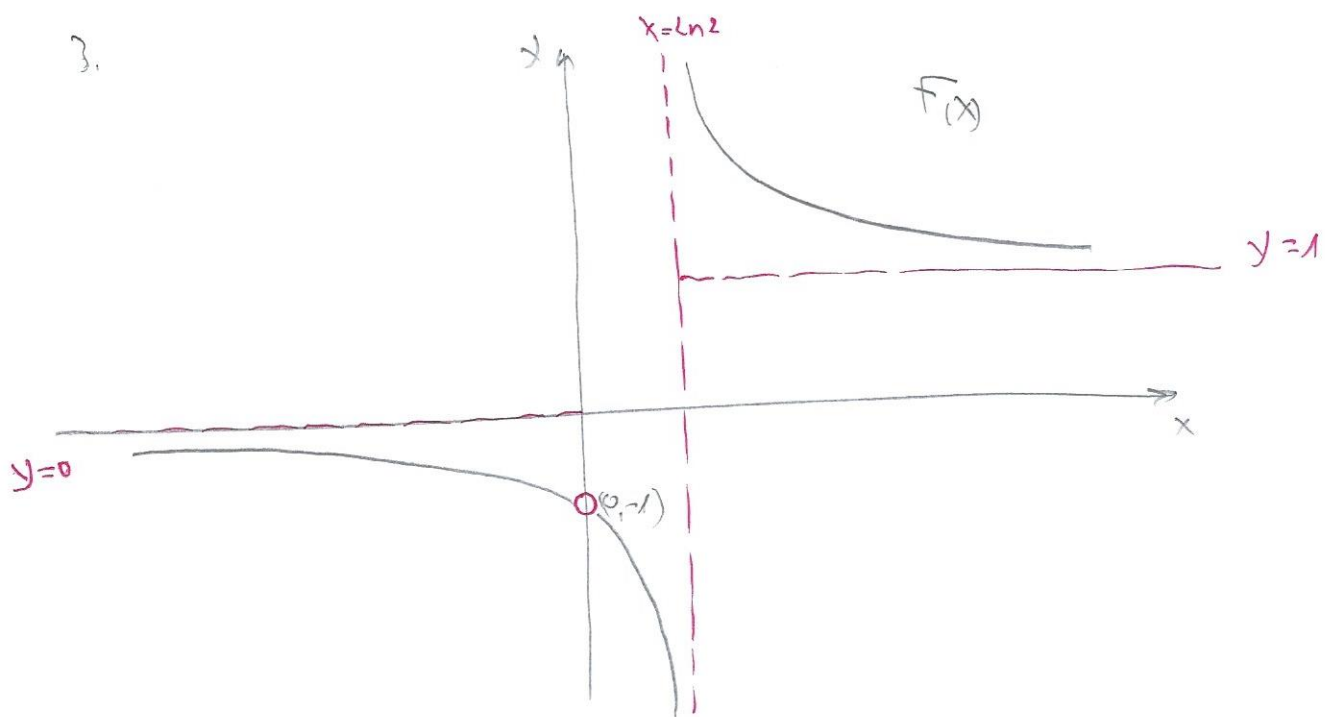


ה.ה.ה.ה.ה. $x \text{ פר } e^x > 0$ ה.ה.ה.ה.ה.

נ/נ



3.



$$h(x) = \left| \frac{e^x}{e^x - 2} - \frac{1}{2} \right|$$

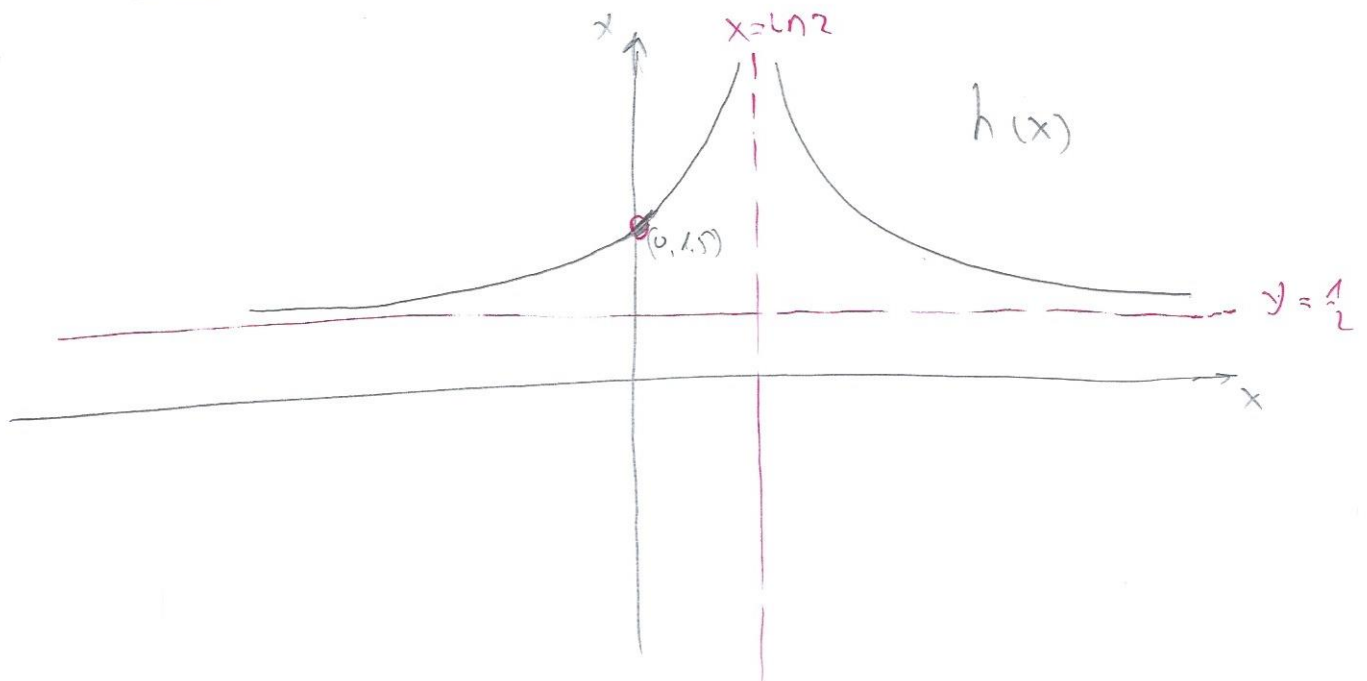
הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה רציפה
 ויש לה נקודת קיצון ב $x = \ln 2$
 שבה היא מתחילה להתנהג
 כמו פונקציה חזקה

אסימטוטה אנכית

$$x = \ln 2$$

אסימטוטה אופקית

$$y = \frac{1}{2}$$



הפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2} - \frac{1}{2}$ היא פונקציה זוגית.
 נמצא את האינטגרל $\int_{\ln 8}^{\ln 16} f(x) dx$.

$$\int_{\ln 8}^{\ln 16} \left(\frac{e^x}{e^x - 2} - \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$\left[\int \frac{e^x}{e^x - 2} dx \stackrel{\text{הצבה}}{\leftarrow} \begin{cases} u = e^x - 2 \Rightarrow du = e^x dx \\ dx = \frac{du}{e^x} \end{cases} \right]$$

$$= \left[\int \frac{e^x}{u} \cdot \frac{du}{e^x} = \int \frac{1}{u} du = \ln u = \ln(e^x - 2) \right]$$

$$= \left[\ln(e^x - 2) - \frac{x}{2} \right]_{\ln 8}^{\ln 16} =$$

$$= \ln(e^{\ln 16} - 2) - \frac{\ln 16}{2} - \left[\ln(e^{\ln 8} - 2) - \frac{\ln 8}{2} \right]$$

$$= \ln 14 - \frac{\ln 16}{2} - \ln 6 + \frac{\ln 8}{2} = \ln \frac{14}{6} + \frac{\ln 8 - \ln 16}{2}$$

$$= \ln \frac{7}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{7}{3} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \frac{7\sqrt{2}}{6} \stackrel{\text{ערך}}{=} 0.5$$

ג) נמצא את הפונקציה הפורמלית $x = \ln 2$

$$x_A = \ln 8$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \frac{x + \ln 8}{2} \Rightarrow x = 2 \ln 2 - \ln 8 = \ln 4 - \ln 8$$

$$x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$h(\ln 2) = \left| \frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2} - 2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 2} - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{5}{6} \right| = \frac{5}{6} \quad \boxed{B(-\ln 2, \frac{5}{6})}$$

5

$$f(x) = f(x)$$

$$g(x) = e^{f(x)}$$

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(x)$$

$$g'(x) = \hat{f}(x) \cdot e^{f(x)}$$

$$\hat{f}(x) = 0$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \hat{f}(x) = 0$$

לכל הנקודות x שבהם $\hat{f}(x) = 0$ נקרא נקודות קריטיות

אם $\hat{f}(x) = 0$ אז $e^{f(x)} > 0$ ולכן $g'(x) = 0$ אם ורק אם $\hat{f}(x) = 0$

כלומר

$\Downarrow$
1) $x \in \mathbb{R}$ נקודה קריטית של g אם ורק אם $\hat{f}(x) = 0$
כלומר

2) $f(x) = x \cdot \ln x^n$

הבהרה

$$x^n > 0$$

$x^n > 0 \Rightarrow x \neq 0$ $x^n > 0 \Rightarrow x > 0$

כלומר

3) אם $x > 0$ אז

$$f(x) = 0 \Rightarrow x \cdot \ln x^n = 0$$

$x = 0$ ~~לא~~ $\hat{f}(x) = 0$

$$\ln x^n = 0 \Rightarrow x^n = 1$$

$x^n = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (1, 0) \quad (-1, 0)$ $x^n = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$
--

3) 1. $f(x)$ פונקציה זוגית $x \rightarrow -x$ נותן $f(x) = f(-x)$
 2. $f(x)$ פונקציה אי-זוגית $x \rightarrow -x$ נותן $f(x) = -f(-x)$

$$f(x) = x \cdot \ln x^n$$

$$f(-x) = -x \cdot \ln(-x)^n$$

$$= -x \cdot \ln x^n$$

$$(-x)^n = x^n$$

זוגית - n

$$\boxed{-f(-x) = x \cdot \ln x^n}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -f(-x)} \quad \underline{\text{p.d.}}$$

2. $f'(x) = \ln x^n + x \cdot \frac{n \cdot x^{n-1}}{x^n} \quad x \neq 0$

$$\boxed{f'(x) = \ln x^n + n}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x^n = -n \Rightarrow x^n = e^{-n}$$

$$x = \pm \sqrt[n]{e^{-n}} = \pm e^{-1} = \pm \frac{1}{e}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln e^{-1} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right) \leftarrow$$

הנקודה הזו היא נקודת מינימום

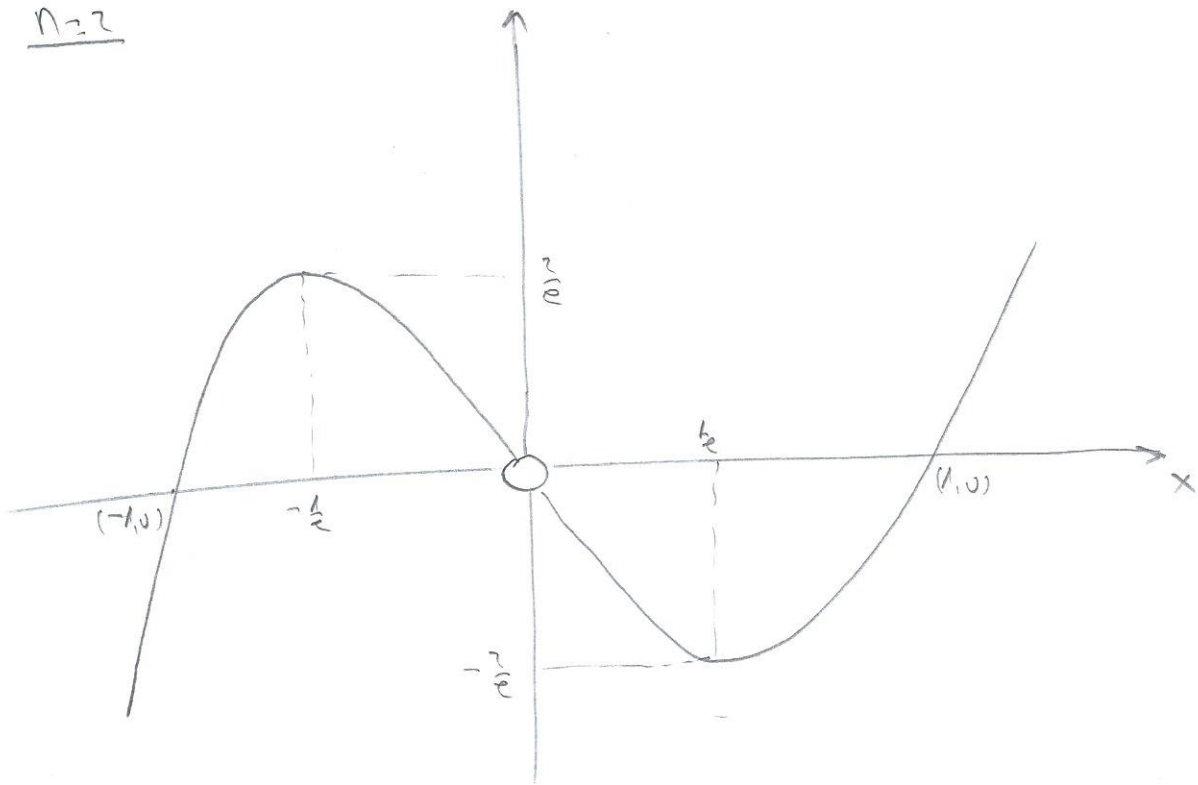
$$\boxed{f''(x) = \frac{n \cdot x^{n-1}}{x^n} = \frac{n}{x}}$$

$$f''\left(\frac{1}{e}\right) > 0 \Rightarrow \min\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$$

$$f''\left(-\frac{1}{e}\right) < 0 \Rightarrow \max\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$$

p.d.

$$\underline{n=2}$$



$$f) \quad e^{F(1/2)} = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$e^{F(-1/2)} = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \min & \left(\frac{1}{e}; e^{-\frac{1}{2}} \right) \\ \max & \left(-\frac{1}{e}; e^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}}$$