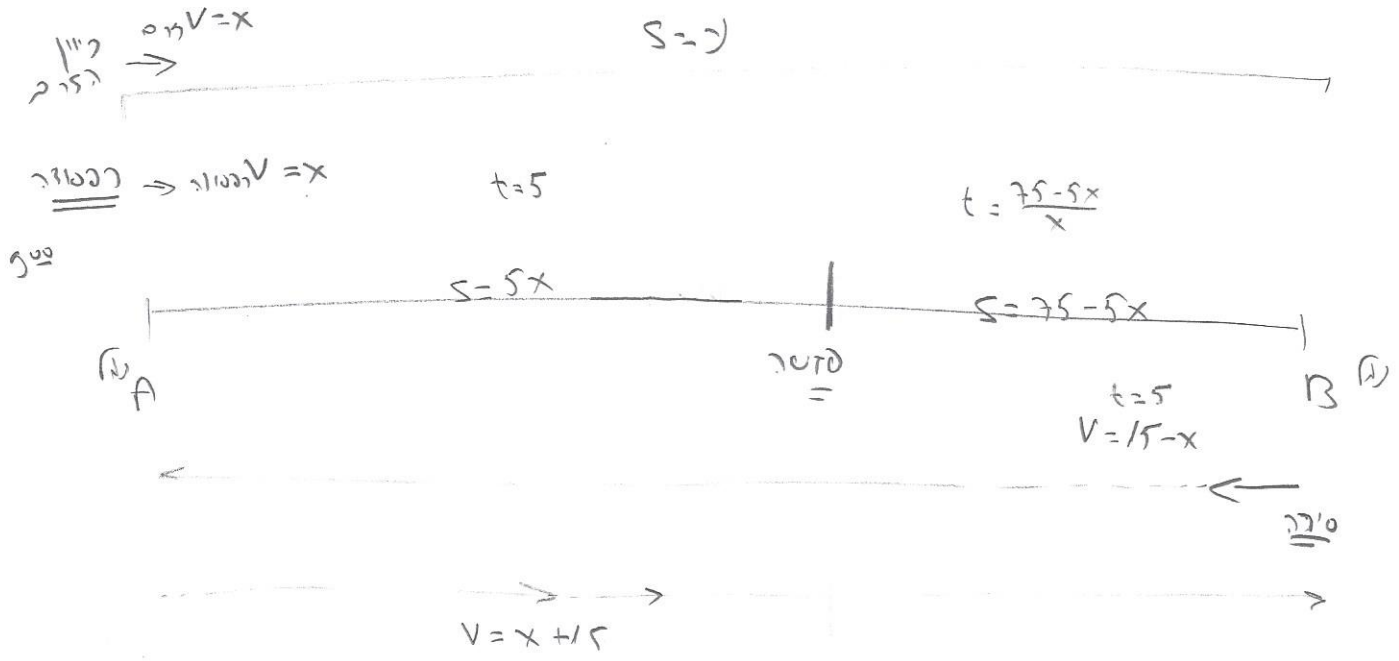
הפיתרון מוצע ע"י ניר דהן

(1)



$$\frac{y}{x+15} + \frac{y}{x-15} = \frac{y}{x} \quad :y \text{ ב-} /$$

$$\frac{1}{x+15} + \frac{1}{x-15} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{30}{x^2-225} \Rightarrow x^2 - 30x - 225 = 0$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{30}}{2} \Rightarrow x = 15 + 15\sqrt{2} = 36.21$$

$$y = 5x + 75 - 5x = 75$$

$$\frac{y}{x} = \frac{75}{36.21} = 12.07$$

זמן הרכיבה מ-A ל-B

הרכיבה והחזרה יחד לקחו 12.07 שעות

(2) $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ — סדרה הנדסית עולה יורדת

$$\frac{a_2}{1-q} = 6 \Rightarrow \boxed{\frac{a_1 q}{1-q} = 6} \quad (1)$$

$a_1, -a_2, a_3, -a_4, \ldots$ ⇐ סדרה הנדסית חדשה

$q = -q$

$$\frac{-a_2}{1+q} = -3 \Rightarrow \boxed{\frac{-a_1 q}{1+q} = -3} \quad (2)$$

$$\frac{\frac{a_1 q}{1-q}}{\frac{-a_1 q}{1+q}} = \frac{6}{-3} \qquad \frac{1+q}{q-1} = -2$$

$$\frac{1}{2}$$

$$1+q = -2q+2 \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{3}}$$

$$\boxed{a_1 = 12}$$

ב) $\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$ $\qquad \underbrace{\frac{1}{a_2 \cdot q^{n-1}}}_{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_2 \cdot q^n}}{\frac{1}{a_2 \cdot q^{n-1}}} = \frac{q^{n-1}}{q^n} = q^{-1} = \underline{\underline{3}}$$

הוכח

ג) $S_n = 273.25 \Rightarrow \frac{1}{a_2}\left(\frac{3^n - 1}{3-1}\right) = 273.25 \qquad \{a_2 = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4\}$

$$3^n = 2187$$

$$\boxed{n = 7}$$

חורף תשע"ד 806

③

P	ריקוד עם A	לא ריקוד עם $\bar{A}$	
תיאטרון B	0.18	0.12	0.3
לא תיאטרון $\bar{B}$	0.42	0.28	0.7
	0.6	0.4	1

A - משתתף ריקוד עם

$\bar{A}$ - לא משתתף ריקוד עם

B - משתתף תיאטרון

$\bar{B}$ - לא משתתף תיאטרון

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ מאורעות בלתי תלויים

$P(A) = 2P(B)$ $P(B) = x$ $\Rightarrow P(A) = 2x$ $\Rightarrow P(A\cap B) = 2x^2$

הלכה ↙

$P(A/B) = 0.6 \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0.6$

$\frac{2x^2}{x} = 0.6 \Rightarrow \boxed{x = 0.3}$

$\Rightarrow P(B) = 0.3$ $P(A\cap B) = 0.18$

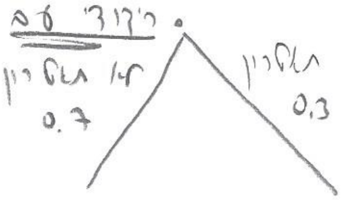
$P(\bar{B}) = 0.7$

$P(A) = 0.6$

$P(\bar{A}) = 0.4$

א) $P(A\cap B) = 0.18 = 18\%$

ב)

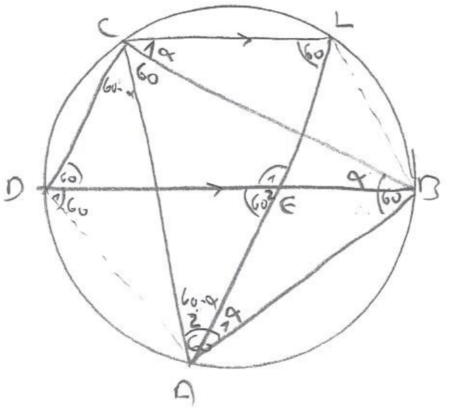


$[0.7^6 + \binom{6}{1}\cdot 0.7^1\cdot 0.3^5$

$P(\text{לפחות 2 משתתפים בחוג תיאטרון}) = 1 - [0.7^6 + \binom{6}{1} 0.3^1\cdot 0.7^5] = 0.572$

(0.7^6 – כולם לא בתיאטרון; $\binom{6}{1} 0.3^1\cdot 0.7^5$ – בדיוק 1 בתיאטרון)

(4) חורף תשע״ז 806



א)

$\sphericalangle D = \sphericalangle A = 60^\circ$ (זוויות היקפיות ...)

$\Rightarrow \sphericalangle C = 120^\circ$ ($\sphericalangle C$ ו-$\sphericalangle D$ חד צדדיות)

$\sphericalangle C_1 = \alpha$

$\sphericalangle ACB = 60$

$\Rightarrow \sphericalangle ACD = 60 - \alpha$

$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle C_1 = \alpha$ (זוויות היקפיות ...)

$\Rightarrow \sphericalangle A_2 = 60 - \alpha$

$\Rightarrow \sphericalangle ACD = \sphericalangle EAC = 60 - \alpha$

$\Rightarrow CD \parallel LA$ (אם זוויות מתחלפות בין ישרים הן שוות אז הישרים מקבילים)

$CL \parallel DE$ נתון

$\Rightarrow$ CLED מקבילית (מרובע שבו ...)

מ.ש.ל

ב)

$\sphericalangle E_1 = \sphericalangle C = 120^\circ$ (זוויות נגדיות במקבילית)

$\Rightarrow \sphericalangle E_2 = 60^\circ$

$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = 60^\circ$ (זוויות היקפיות)

$\Rightarrow \sphericalangle DAE = 60^\circ$ (סכום זוויות ב-$\triangle DEA$ 180°)

$\Rightarrow$ $\triangle DEA$ ש״צ

ג) $\triangle LEB$ שווה צלעות (דרך הוכחה זהה לסעיף ב')

$\Rightarrow LB = LE$

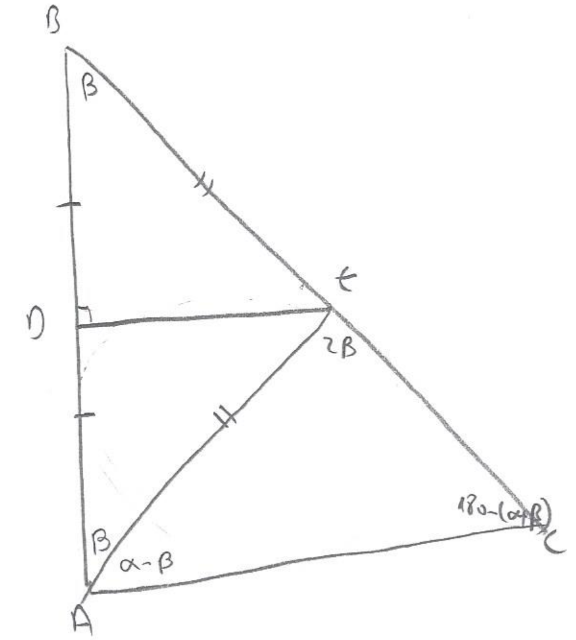
$CL = DE = AE$ (מקבילית; משולש שווה צלעות)

$\Rightarrow AE + LE = LA$, $AE = LC$, $LE = LB$

$\Rightarrow$ $LC + LB = LA$

מ.ש.ל

5



DE אנך אמצעי

$\Rightarrow BE=EA$ (אנך אמצעי הינו המקום הגאומטרי ...)

[illegible]

א) 1) $\boxed{\sphericalangle EAC = \alpha-\beta}$

2) $\frac{CE}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{AE}{\sin[180-(\alpha+\beta)]} \Rightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ $(AE=BE)$

$$\boxed{\frac{CE}{EB} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}}$$

ב) נתון AE חוצה זוי.

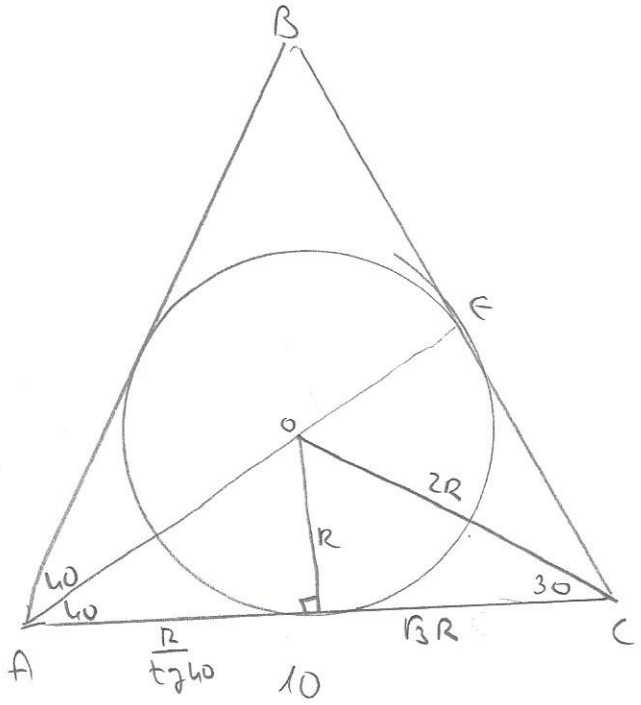
$\beta=40^\circ \Rightarrow \alpha=80$

$AC=10$ ס"מ

$\frac{CE}{EB} = \frac{AC}{AB}$ (לפי משפט חוצה הזוית)

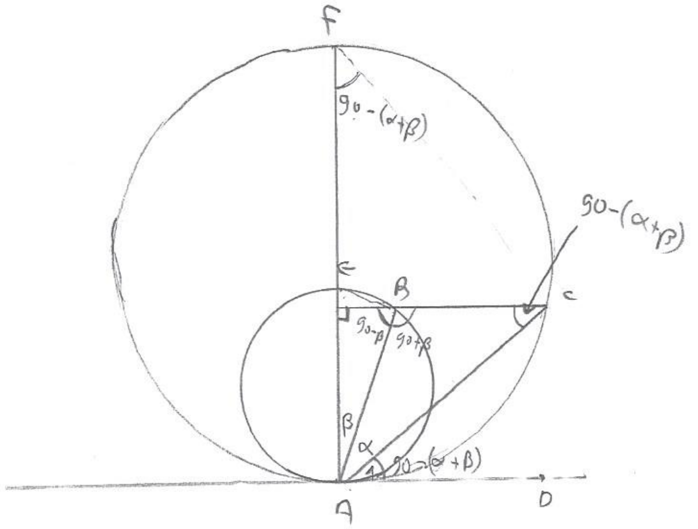
$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{10}{AB}$ $\begin{bmatrix}\alpha=80\\ \beta=40\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\boxed{AB=13.85 \text{ ס"מ}}$

המשך $\Leftarrow$



$$\frac{R}{tg40} + \sqrt{3}R = 10 \quad \Rightarrow \boxed{R = 3{,}42\ cm}$$

(6)



$AF = 2R$

$AE = 2r$

א) 1) נתון $AD \parallel BC$ התרת זוינ

$\boxed{\measuredangle BCA = 90-(\alpha+\beta)}$

2) $\dfrac{AC}{\underbrace{\sin(90+\beta)}_{\cos\beta}} = \dfrac{AB}{\underbrace{\sin[90-(\alpha+\beta)]}_{\cos(\alpha+\beta)}} \Rightarrow \boxed{\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}}$ מ.ש.ל

ב) בניית עזר:
מיתרים BE, FC

$\measuredangle ACF = \measuredangle ABE = 90°$ (זוית היקפית על קוטר.)

$\underline{\Delta AFC}$

$\dfrac{AC}{2R} = \sin[90-(\alpha+\beta)] \Rightarrow \boxed{AC = 2R\cdot\cos(\alpha+\beta)}$

$\underline{\Delta BEA}$

$\dfrac{AB}{2r} = \sin(90-\beta) \Rightarrow \boxed{AB = 2r\cdot\cos\beta}$

$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)} \Rightarrow \dfrac{2R\cos(\alpha+\beta)}{2r\cos\beta} = \dfrac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{R}{r} = \dfrac{\cos^2\beta}{\cos^2(\alpha+\beta)}}$ מ.ש.ל

(7) $f(x) = \dfrac{x^2+x-a}{x^2-x+a}$ $\quad (a>1)$

ב) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+x-a}{x^2-x+a} \;\Big|: x^2 = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}} = 1$

$y = 1$

ג. $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x^2-x+a) - (x^2+x-a)(2x-1)}{(\quad)^2}$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+4ax}{(x^2-x+a)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow -2x^2+4ax=0 \Rightarrow -2x(x-2a)=0$

$x_1 = 0 \Rightarrow f(0) = -1 \Rightarrow (0,-1)$

$x_2 = 2a \quad f(2a) = \frac{4a+1}{4a-1} \quad \left(2a, \frac{4a+1}{4a-1}\right)$

x	$x<0$	0	$0<x<2a$	$2a$	$x>2a$
y'	$x=-a$ $-$		$x=a$ $+$		$x=3a$ $-$
f	↘	min	↗	max	↘

$f'(-a) = \frac{-6a^2}{(+)} = (-)$

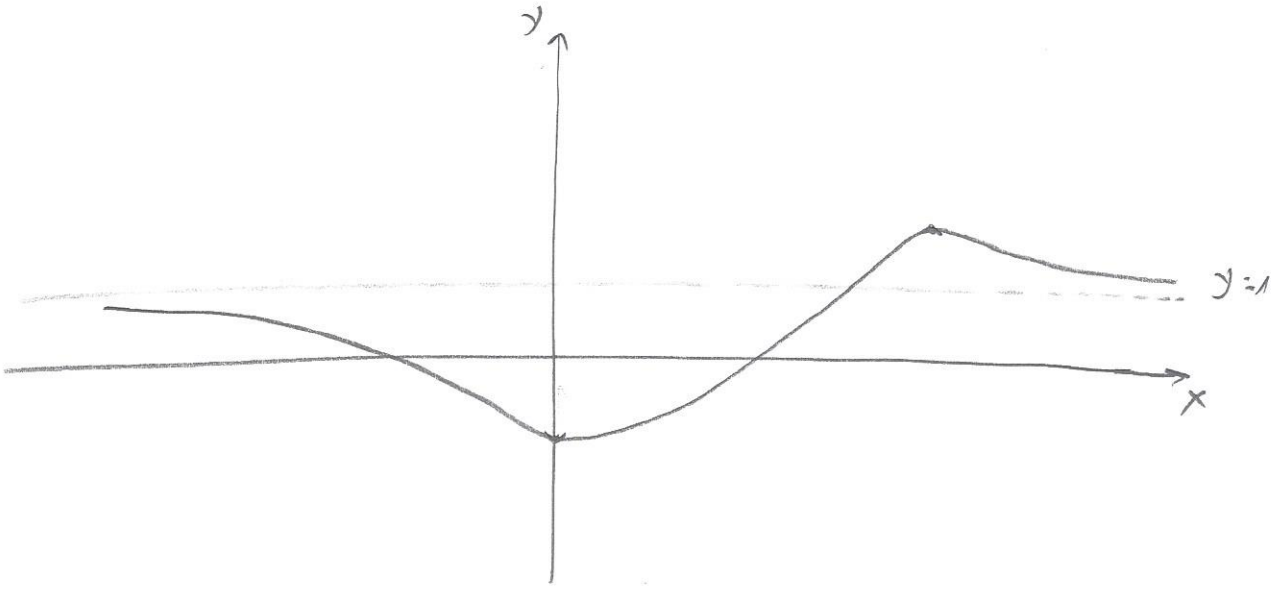
$f'(a) = \frac{2a^2}{(+)} = (+)$

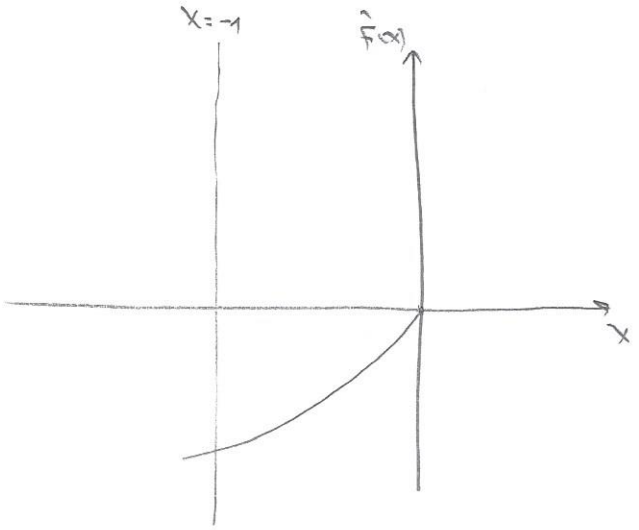
$f'(3a) = \frac{-6a^2}{(+)} = (-)$

$\min(0,-1)$

$\max\left(2a, \frac{4a+1}{4a-1}\right)$

3)





$$\int_{-1}^{0} -\dot{f}(x)\,dx = \Big[-f(x)\Big]_{-1}^{0} = -f(0) - \Big[-F(-1)\Big] = F(-1) - F(0) = \frac{1}{2}$$

$(F(0) = -1)$

$$\Rightarrow F(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1-1-a}{1+1+a} = -\frac{1}{2} \qquad 2a = 2 + a$$

$$\boxed{a = 2}$$

$$F(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x+2}$$

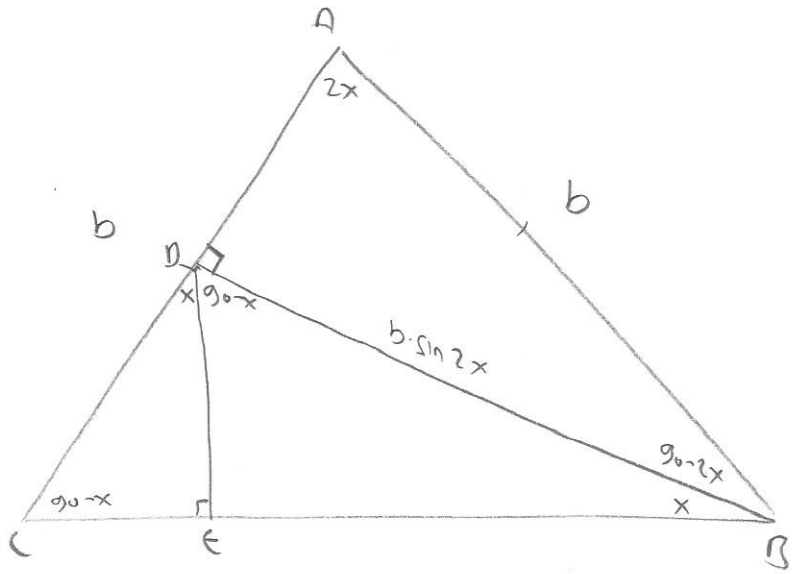
לחיתוך עם ציר x

$$x^2+x-2 = 0$$

$$x = -2$$
$$x = +1$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}(-2,0)\\(1,0)\end{matrix}}$$

(8)



$\triangle ADB$

$$\frac{DB}{b} = \cos(90-2x) \Rightarrow DB = b\cdot\sin 2x$$

$\triangle DEB$

$$\frac{DE}{b\cdot\sin 2x} = \sin x \Rightarrow \boxed{DE = b\cdot\sin 2x\cdot\sin x}$$

$$\boxed{D\dot{E} = b\left[2\cos 2x\cdot\sin x + \sin 2x\cdot\cos x\right]}$$

$$D\dot{E} = 0 \Rightarrow 2\cos 2x\cdot\sin x + \sin 2x\cdot\cos x = 0$$

$$2\cos 2x\cdot\sin x + 2\sin x\cdot\cos^2 x = 0$$

$$2\sin x\left[\cos 2x + \cos^2 x\right] = 0$$

$$\sin x = 0$$

$x = 180^\circ k$ ∅

$$2\cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$x = 54.73 + 360^\circ k$

$x = -54.73 + 360^\circ k$ ∅

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$x = \pm 125 + 360^\circ k$ ∅

$x = 54.73$

x	54	54.73	55
$\dot{y}$	+	0	−
y	↗	max	↘

$\dot{F}(54) = 0.0595$

$\dot{F}(55) = -0.02$

$\max x = 54.73$

$\sphericalangle BAC = 109.46^\circ$

$1 < x < 2$

(6)

x	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	1.19	1.28	1.36	1.43

$f''(x)$ שלילי בקטע הזה $\Leftarrow$ קעור

כלומר: בקטע הזה

(ג) הנגזרת שלה גדלה בתחום הזה

$$f'(1.2) > 0$$

(ד) בקטע הזה $f''(x) < 0$

$\Downarrow$

$f'(x)$ פונקציה יורדת

$\Downarrow$

$$f'(1.1) > f'(1.2) > f'(1.3)$$

ה) $g(x) = \sqrt{f(x)}$ $\quad 1 < x < 2$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

הפונקציה $f(x)$ חיובית עבור x בתחום הנתון
ולכן $f'(x) > 0$ עבור x בתחום הנתון

$\Leftarrow$ $g'(x) > 0$ עבור x בתחום
הנתון

$\Leftarrow$ $g(x)$ עולה עבור x
בתחום הנתון.

ו) $g'(x) = f'(x)$ $\quad 1.1 \leq x \leq 1.3$

$\sqrt{f(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} = 0.25$ $\Leftarrow$ $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = f'(x)$

הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום הנתון ולכן $f(1.1) = 0.3$ הגבוה
עבור x עבור $f(x) = 0.25$ אין