הפיתרון מוצע ע״י ניר דהן

(ב) $m_{PB} = m_{NB}$

$$\Rightarrow ① \quad \frac{y}{x+5} = \frac{y_0}{x_0+5}$$

$m_{PA} = m_{NA}$

$$\Rightarrow ② \quad \frac{y}{x-5} = \frac{y_0}{5-x_0}$$ ← הצבה

נחלק בין המשוואות:

$$\frac{\frac{y}{x+5}}{\frac{y}{x-5}} = \frac{\frac{y_0}{x_0+5}}{\frac{y_0}{5-x_0}} \Rightarrow \frac{x-5}{x+5} = \frac{5-x_0}{5+x_0}$$

$$\Rightarrow 5x + x \cdot x_0 - 25 - 5x_0 = 5x - x \cdot x_0 + 25 - 5x_0$$

$$2x \cdot x_0 = 50 \quad / :2$$

$$x \cdot x_0 = 25$$

$$\boxed{x_0 = \frac{25}{x}}$$

$$\boxed{y_0 = \frac{5y - x_0 y}{x-5} = \frac{5y - \frac{25y}{x}}{x-5} = \frac{5xy - 25y}{x(x-5)} = \frac{5y(x-5)}{x(x-5)} = \frac{5y}{x}}$$

(x_0, y_0) נקודה על המעגל ולכן:

$$\left(\frac{25}{x}\right)^2 + \left(\frac{5y}{x}\right)^2 = 25$$

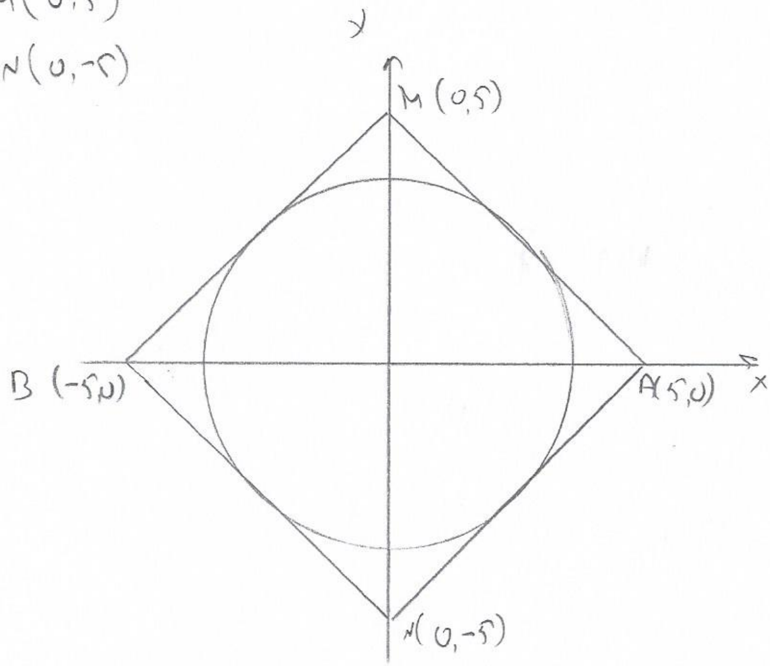
$$\frac{625}{x^2} + \frac{25y^2}{x^2} = 25 \quad / :25 \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = 1 \quad / \cdot x^2$$

$$25 + y^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^2 = x^2 - 25}$$ מ.ש.ל

← המשך

המיתר MN מינימלי לכן ה-y [illegible]

$M(0,5)$
$N(0,-5)$



$MB = MA = AN = BN = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50}$ (לפי פיתגורס)

$\Rightarrow$ BMAN מעוין (מרובע שבו כל הצלעות שוות הוא מעוין)

$m_{BM} = 1$

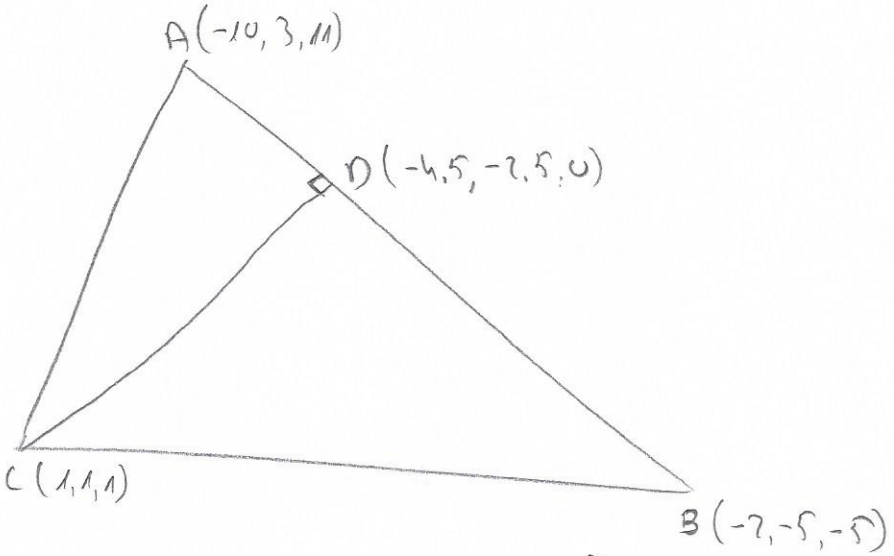
$m_{BN} = -1$

$\Rightarrow BM \perp BN$

$\Rightarrow$ BMAN ריבוע (מעוין שבו זווית ישרה הוא ריבוע)

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{BN}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}}$$

(2)



ב) נמצא משוואת הישר AB

$\vec{AB} = (8, -8, -16) \;/:8$

$\vec{AB} = (1, -1, -2)$

$\Rightarrow \boxed{l_{AB}: \underline{x} = (-10, 3, 11) + t(1, -1, -2)}$

עבור נקודה D על הישר נקבל

$D(-10+t,\ 3-t,\ 11-2t)$

$\vec{CD} = (-11+t,\ 2-t,\ 10-2t)$

$\vec{CD} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{CD} \cdot \vec{AB} = 0$

$\Rightarrow (-11+t,\ 2-t,\ 10-2t)(1, -1, -2) = 0$

$-11+t-2+t-20+4t = 0$

$6t = +33$

$\boxed{t = \frac{33}{6}}$

$\boxed{D(-4.5, -2.5, 0)}$

המשך ←

ג) $E(-1,5,-2)$

נבנה הישר CE

$\vec{CE} = (2,-4,3)$

$$l_{CE}: \underline{x} = (-1,5,-2) + s(2,-4,3)$$

1) $\cos\alpha = \dfrac{|(2,-4,3)(1,-1,-2)|}{\sqrt{2^2+4^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{6}} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 90^0}$

2) $\vec{BC} = (3,6,6) /:3 \quad \vec{BC} = (1,2,2)$

$\cos\alpha = \dfrac{|\vec{BC}\cdot\vec{CE}|}{|\vec{BC}|\cdot|\vec{CE}|} = \dfrac{|(1,2,2)(2,-4,3)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+3^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{29}} = 0$

$\boxed{\alpha = 90^0}$

3) ישר (CE) המאונך לשני ישרים במישור
(AB ו BC) מאונך למישור כולו לכן

$\boxed{\alpha = 90^0}$

ד) זו' בין ישר למישור היא הזו' שבין הישר (ED)
לבין היטלו על המישור (CD)

$\vec{CD} = (-5.5, -3.5, -1) \Rightarrow |\vec{CD}| = \sqrt{5.5^2+3.5^2+1} = \sqrt{43.5}$

$\vec{CE} = (2,-4,3) \Rightarrow |\vec{CE}| = \sqrt{2^2+4^2+3^2} = \sqrt{29}$

ΔEDC ישר זו' (CE מאונך למישור ו CD)
הזו' הנ"ל על ED

$tg\,\alpha = \dfrac{|\vec{CE}|}{|\vec{CD}|} = \dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{43.5}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 39.23^0}$

מועד 2015 קיץ

(3) ב) $|z|i + 2z = \sqrt{3}$

$z = a + bi$

$\sqrt{a^2+b^2}\, i + 2(a+bi) = \sqrt{3}$

$\Rightarrow 2a + (2b + \sqrt{a^2+b^2})\, i = \sqrt{3}$

$2a = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$2b + \sqrt{a^2+b^2} = 0$

מכאן.

$\sqrt{\frac{3}{4}+b^2} = -2b$ ריבוע של שורש.

$\frac{3}{4} + b^2 = 4b^2 \Rightarrow 3b^2 = \frac{3}{4}$

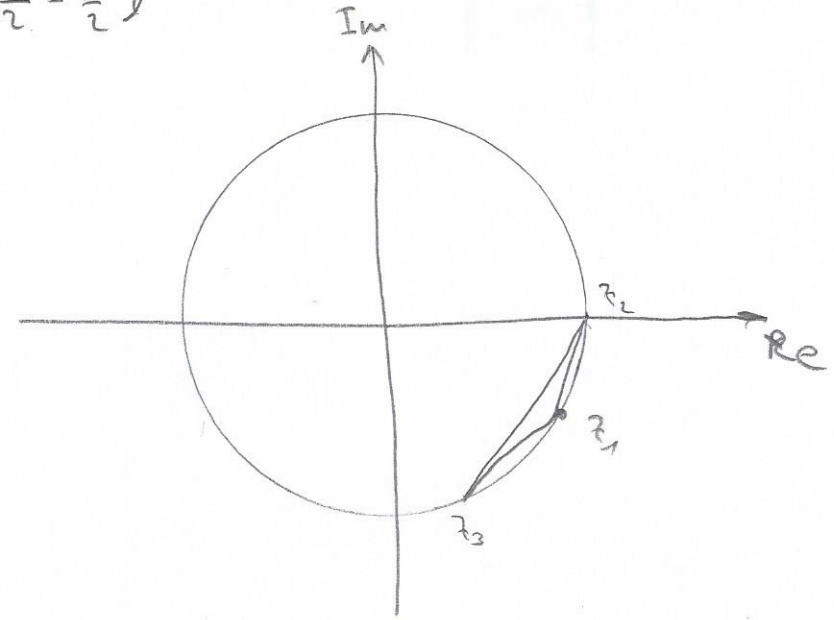
$b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ או

$\boxed{b = -\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$

הלאה

ב) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$



$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = cis\,330$

$z_2 = 1 = cis\,0$

$\Rightarrow \hat{z_1 z_2} = 30°$

$\Rightarrow z_3 = cis\,300$

$w = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = cis\,330 \cdot cis\,0 \cdot cis\,300 = cis\,270 = -i$

$w + w^2 + w^3 + \dots + w^{4n}$

נסמן ב- a_n את הסדרה. $a_1 = -i$ ו- $a_n = w^n$ נקבל כי

$q = w = -i$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w^{n+1}}{w^n} = w$

$n = 4n$

$S_{4n} = \frac{a_1[q^{4n} - 1]}{q - 1} = \frac{-i\left[(-i)^{4n} - 1\right]}{-i - 1}$

$(-i)^{4n} = \left[\left((-i)^2\right)^2\right]^n = \left((-1)^2\right)^n = 1^n = 1$

$= \frac{-i(1-1)}{-i-1} = 0 \Rightarrow \boxed{S_{4n} = 0}$

(4) $F(x)=\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}$

$$g(x)=F'(x)\cdot F(x)=\underbrace{\frac{2^{x-m}\cdot \ln 2-2^{m-x}\cdot \ln 2}{2\cdot\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}}}_{F'(x)}\cdot\underbrace{\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}}_{F(x)}$$

$2^{x-m}>0$

$2^{m-x}>0$ לכל x

$$\Rightarrow \boxed{g(x)=\frac{\ln 2\,(2^{x-m}-2^{m-x})}{2}}$$

$g(2)=-\frac{3}{4}\cdot \ln 2$ נתון

$$\Rightarrow \frac{\ln 2\,(2^{2-m}-2^{m-2})}{2}=-\frac{3}{4}\ln 2 \quad /\cdot\frac{2}{\ln 2}$$

$$2^{2-m}-2^{m-2}=-\frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{2^m}-\frac{2^m}{4}=-\frac{3}{2}$$

$$\underline{2^m=t}\Rightarrow \frac{4}{t}-\frac{t}{4}=-\frac{3}{2}\quad /\cdot 4t$$

$$\Rightarrow t^2-6t-16=0$$

$$t_1=8\Rightarrow 2^m=8\Rightarrow \boxed{m=3}$$

$$t_2=-2\Rightarrow 2^m=-2\ \emptyset \qquad 2^m>0 \text{ לכל } m$$

<u>חיתוך עם ציר x</u>

$$y=0\Rightarrow 2^{x-3}-2^{3-x}=0\Rightarrow 2^{x-3}=2^{3-x}$$

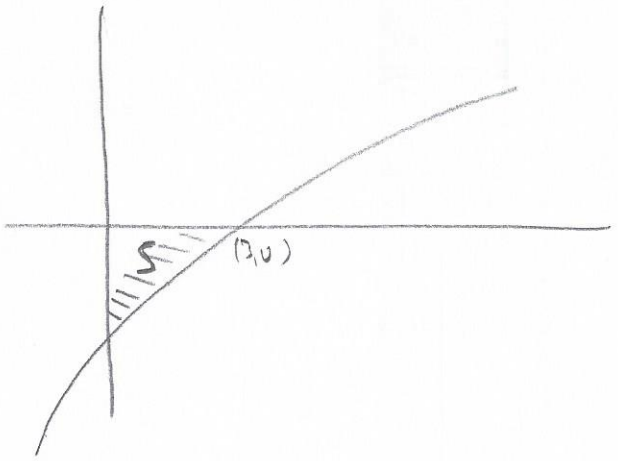
$$x-3=3-x\Rightarrow x=3\Rightarrow \boxed{(3,0)}$$

<u>חיתוך עם ציר y</u>

$$\underline{x=0}\Rightarrow g(0)=\frac{\ln 2}{2}(2^{-3}-2^{3})<0$$

הפונ' חותכת את ציר ה y בחלקו השלילי.

←



$$\int_0^3 0 - g(x)\,dx = \int_0^3 -\dot{F}(x)\cdot F(x)\,dx$$

$$u = F(x) \Rightarrow du = \dot{F}(x)\cdot dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\dot{F}(x)}$$

$$= \int_0^3 -\cancel{\dot{F}(x)}\cdot u\cdot \frac{du}{\cancel{\dot{F}(x)}} = \int_0^3 -u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^3 = \left[\frac{-(F(x))^2}{2}\right]_0^3$$

$$= \left[-\frac{2^{x-3}+2^{3-x}}{2}\right]_0^3 = -\frac{1+1}{2} + \left[-\frac{2^{-3}+2^3}{2}\right] = \frac{49}{16}$$

c.n.

תרגיל [illegible] [illegible]

(5) $f'(x)=\frac{\ln(-x)+2}{x}$

א) ת. הגדרה

$x\neq 0$ וגם $-x>0$

$\boxed{x<0}$

ב) מציאת נק' הקיצון של $f'(x)$

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-[\ln(-x)+2]}{x^2}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{-\ln(-x)-1}{x^2}}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow -\ln(-x)-1=0 \Rightarrow \ln(-x)=-1$

$\Rightarrow -x=e^{-1} \Rightarrow x=-\frac{1}{e}$

$f'\left(-\frac{1}{e}\right)=\frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right)+2}{-\frac{1}{e}}=-e \Rightarrow \left(-\frac{1}{e};-e\right)$

x	$x<-\frac{1}{e}$	$-\frac{1}{e}$	$-\frac{1}{e}<x<0$	0
סימן הנגזרת השנייה → y''	$x=-1$ −		$x=-0.1$ +	///
מונוטוניות → y'	↘	min	↗	///

מכנה הנגזרת השנייה חיובי לכל x בת. ההגדרה לכן נציב במונה בלבד.

$f''(-1)=-\ln 1-1=-1<0$

$f''(-0.1)=-\ln(0.1)-1=1.3>0$

$\Rightarrow \boxed{\min\left(-\frac{1}{e};-e\right)}$

ט)

<u>מציאת נק' הקיצון של $F(x)$</u>

$$F'(x)=0 \Rightarrow \ln(-x)+2=0$$

$$\ln(-x)=-2 \Rightarrow -x=e^{-2}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{e^2}$$

$$F''\left(-\frac{1}{e^2}\right)=\frac{-\ln(e^{-2})-1}{\left(-\frac{1}{e^2}\right)^2}=\frac{1}{(+)}>0$$

$$\Rightarrow \boxed{\min \quad x=-\frac{1}{e^2}}$$

י) $g(x)=-\dfrac{1}{F'(x)}$

(1) ת. הגדרה

$F'(x)\neq 0$ וגם $x<0$

↑ לפי סעיף ט'

$$\boxed{x\neq -\frac{1}{e^2}\ ;\ x<0}$$

(2) <u>מציאת נק' קיצון של $g(x)$</u>

$$\boxed{g'(x)=\frac{F''(x)}{[F'(x)]^2}}$$

$g'(x)=0 \Rightarrow F''(x)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{e}$ (ראינו סעיף ב')

$$g\left(-\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{F'\left(-\frac{1}{e}\right)}=-\frac{1}{-e}=\frac{1}{e} \Rightarrow \left(-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$$

המכנה של $g'(x)$ חיובי לכן הסימן של $g'(x)$ מושפע מהסימן של $F''(x)$ לפי הטבלה שבסעיף ב

$$\boxed{\min\left(-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)}$$