קיץ 2018 מועד ב'
805

(1)

a_n - סדרה הנדסית אינסופית

b_n - סדרה הנדסית אינסופית

$q = q$ $\qquad$ $q = 3q$

$$S = \frac{a_1}{1-q} \qquad T = \frac{b_1}{1-3q} \qquad (\text{נתון } b_1 = a_1)$$

$$T = \frac{a_1}{1-3q}$$

$$\frac{S}{T} = \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\cancel{a_1}}{1-q}}{\frac{\cancel{a_1}}{1-3q}} = \frac{6}{7} \Rightarrow \frac{1-3q}{1-q} = \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow 7(1-3q) = 6(1-q) \Rightarrow 7-21q = 6-6q$$

סעיף א' $\boxed{q = \frac{1}{15}}$

הצבה

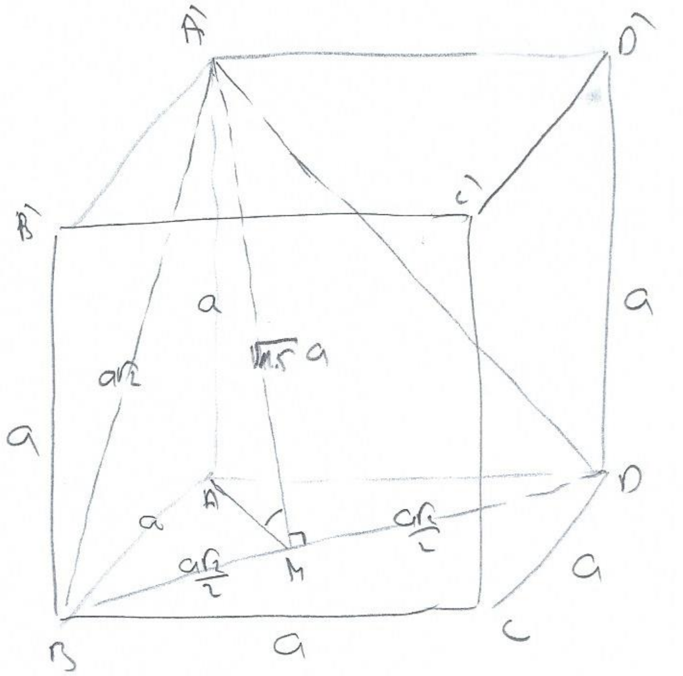
ב) $a_4 = 5 \Rightarrow a_1 \cdot q^3 = 5 \qquad a_1 = 16{,}875 = b_1$

$$b_4 = b_1 \cdot q_b^3 = 16{,}875 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{15}\right)^3 = 135$$

$$\boxed{b_4 = 135}$$

קיץ 2018
מועד ב'

(2)



1) נתון $ABCDA'B'C'D'$ קוביה שאורך צלעה a

2) לפי 1 כל האלכסונים שווים וכיון שכל הפאות שוות והן ריבועים (חופפים) $A'B$; BD, $A'D$ הן אלכסוני הריבועים ולכן הם שווים $\Leftarrow$ $A'B=A'D=BD$ מ.ש.ל.

3) נתון $A'M \perp BD$

4) הזווית בין $A'M$ למישור $ABCD$ היא הזווית שבין $A'M$ לבין ההיטל שלו על המישור שהוא AM

$\measuredangle A'MA$

ה) $\underline{\triangle BDC}$

$BD=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$ לפי פיתגורס

$\Rightarrow BM=MD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (לפי 2, 3, ה + גובה במשולש שווה צלעות הוא גם תיכון)

$\swarrow$

6) $\hat{A}B = BD = \hat{A}D = a\sqrt{2}$ (לפי 2, 5)

7) $\underline{\Delta \hat{A}BM}$

$\hat{A}M = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{1.5}\,a$ (לפי פיתגורס)

7) $\underline{\Delta \hat{A}AM}$

$\frac{\cancel{a}}{\sqrt{1.5}\,\cancel{a}} = \sin \measuredangle \hat{A}MB \Rightarrow \boxed{\measuredangle \hat{A}MB = 54.73^\circ}$ <u>מ.ש.ל ב'</u>

8) $S_{\Delta \hat{A}BD} = 8\sqrt{3}$ נתון

$\Rightarrow \frac{a\sqrt{2} \cdot a \cdot \sqrt{1.5}}{2} = 8\sqrt{3} \quad / : \sqrt{3}$

$\frac{a^2}{2} = 8 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

(כי) $a > 0 \Rightarrow \boxed{a = 4}$ <u>מ.ש.ל ג'1</u>

9) $P = S_{\Delta \hat{A}BD} + S_{\Delta \hat{A}BA} + S_{\Delta \hat{A}AD} + S_{\Delta ABD}$

$= 8\sqrt{3} + \frac{a \cdot a}{2} + \frac{a \cdot a}{2} + \frac{a \cdot a}{2}$

$= 8\sqrt{3} + \frac{3a^2}{2} = 8\sqrt{3} + \frac{48}{2} = 8\sqrt{3} + 24 =$

$\boxed{P = 37.856}$

<u>מ.ש.ל ג'2</u>

קיץ 2018 805
מועד ב'

③ $f(x) = 2\sin x + \cos 2x \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

א) נק' קיצון

$$\boxed{f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\cos x - 2\sin 2x = 0 \qquad (\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x)$

$\Rightarrow 2\cos x - 4\sin x \cdot \cos x = 0$

$2\cos x(1 - 2\sin x) = 0$

$\cos x = 0 \qquad \sin x = \frac{1}{2}$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi k} \qquad \boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k} \qquad \boxed{x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k}$

$k=0 \qquad x = \frac{\pi}{2}$ ✓ $\qquad x = \frac{\pi}{6}$ ✓ $\qquad x = \frac{5\pi}{6}$ ✗

קצה $f(0) = 2\sin 0 + \cos 0 = 1 \Rightarrow (0, 1)$

$f(\frac{\pi}{6}) = 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 1.5 \Rightarrow (\frac{\pi}{6}; 1.5)$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 1 \Rightarrow (\frac{\pi}{2}; 1)$

$$\boxed{f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x}$$

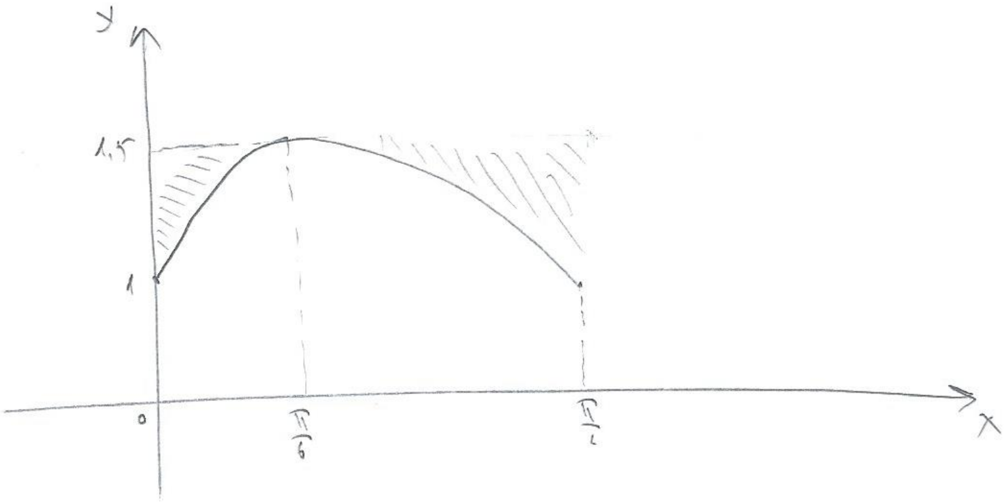
$f''(\frac{\pi}{6}) = -2\sin\frac{\pi}{6} - 4\cos\frac{\pi}{3} = -3 < 0 \Rightarrow \boxed{\max(\frac{\pi}{6}; 1.5)}$

$\Downarrow$

קצה $\boxed{\min(0, 1)}$

מקומי / קצה $\boxed{\min(\frac{\pi}{2}, 1)}$

ג)



ד) 1. הישר $y=k$ משיק לגרף הפונ' בנק' המקסימום שלה $(\frac{\pi}{6}, 1.5)$ $\Leftarrow$ $\boxed{K=1.5}$ מ.ש.ל

2.

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1.5-(2\sin x+\cos 2x)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2\sin x-\cos 2x+1.5)\,dx$$

$$=\left[2\cos x-\frac{\sin 2x}{2}+1.5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}-\frac{\overset{0}{\sin\pi}}{2}+\frac{3\pi}{4}-\left[2\overset{1}{\cos 0}-\frac{\overset{0}{\sin 0}}{2}+0\right]$$

$$=\frac{3\pi}{4}-2=0.356$$

מ.ש.ל

קיץ 2018 805
מועד ב'

(4) $f(x)=\dfrac{a-e^{x}}{e^{2x}}$ $\qquad a>0$

א) 1. ת. הגדרה

$\boxed{\text{כל } x}$ $\qquad$ כל x $e^{x};\ e^{2x}>0$

2. חיתוך עם ציר x

$y=0 \Rightarrow a-e^{x}=0 \Rightarrow e^{x}=a$

$x=\ln a \Rightarrow \boxed{(\ln a;\ 0)}$

חיתוך עם ציר y

$x=0 \Rightarrow f(0)=\dfrac{a-e^{0}}{e^{0}}=\dfrac{a-1}{1}=a-1$

$\boxed{(0;\ a-1)}$

ב) $f(0)=0$ $\qquad$ נתון

$\Rightarrow a-1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$

ג) 1. מציאת נק' הקיצון

$f'(x)=\dfrac{-e^{3x}-2e^{2x}(1-e^{x})}{e^{4x}}=\dfrac{-e^{3x}-2e^{2x}+2e^{3x}}{e^{4x}}$

$\boxed{f'(x)=\dfrac{e^{2x}(e^{x}-2)}{e^{4x}}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow e^{x}-2=0 \Rightarrow e^{x}=2$

כל x $e^{2x}>0$ $\qquad x=\ln 2$

$f(\ln 2)=\dfrac{1-e^{\ln 2}}{e^{2\ln 2}}=\dfrac{1-2}{4}=-\dfrac{1}{4} \Rightarrow (\ln 2;\ -\dfrac{1}{4})$

x	$x<\ln 2$	$\ln 2$	$x>\ln 2$
y' - סימן הנגזרת לפי הגרף	$x=0$ $-$		$x=\ln 3$ $+$
y - עולה/יורדת לפי סימן הנגזרת	↘	min	↗

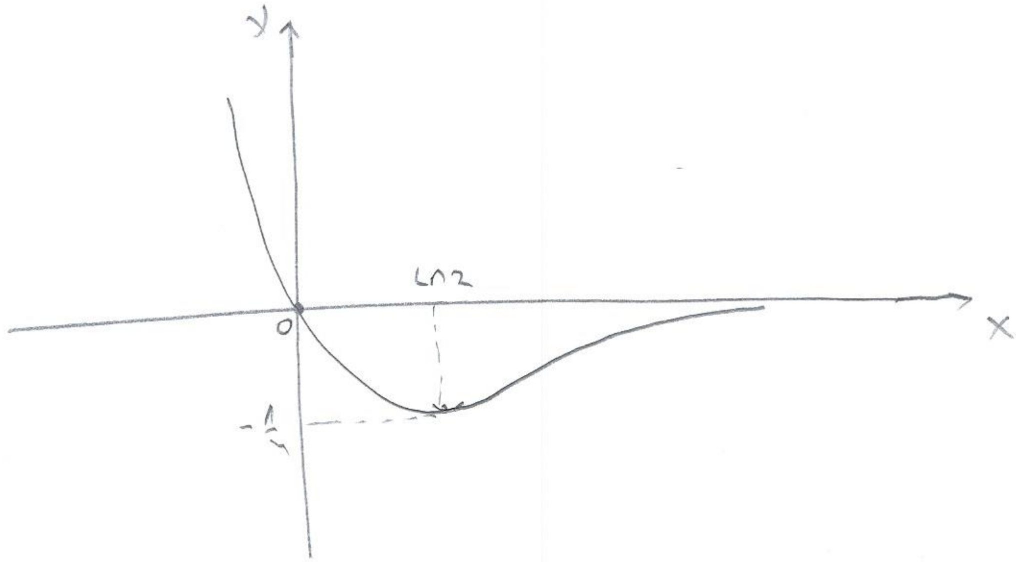
לכל x: $e^{2x}>0$, $e^{4x}>0$ $\Rightarrow$ $F'(0)=\dfrac{(+)\cdot(\overset{1}{e^{0}}-2)}{(+)}=(-)$

$$F'(\ln 3)=\frac{(+)\left[e^{\ln 3}-2\right]}{(+)}=(+)$$

עפ״י ניתוח התחומים בטבלה:

נ.ק. $\boxed{\min(\ln 2;-\tfrac{1}{4})}$

2.



3) $g'(x)=F(x)$

x	$x<0$	0	$x>0$
$g'(x)$ - סימן הנגזרת לפי הגרף	$+$		$-$
$g(x)$ - עולה/יורדת לפי סימן הנגזרת	↗	max	↘

עפ״י ניתוח הגרף בטבלה

נ.ק. ד' $\boxed{\max\ x=0}$

דף 1 קיץ 2018
מועד ב'

(5) $F(x) = \frac{\ln(x^2)}{x^2}$

ב) 1. ת. הגדרה

Ln	מכנה
$x^2 > 0$	$x^2 \neq 0$
$\boxed{x \neq 0}$	$\boxed{x \neq 0}$

$$\boxed{x \neq 0}$$

2. אסימפטוטה אנכית

$x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

3. חיתוך עם ציר x

$y = 0 \Rightarrow \ln x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$

$x = \pm 1 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}(1,0)\\(-1,0)\end{matrix}}$

חיתוך עם ציר y

$x = 0 \quad \emptyset$ (נפסל בגלל ת. הגדרה)

4. מציאת נק' קיצון

$$F'(x) = \frac{\frac{2x}{\cancel{x^2}} \cdot \cancel{x^2} - 2x \cdot \ln(x^2)}{x^4}$$

$$\boxed{F'(x) = \frac{2x(1 - \ln(x^2))}{x^4}}$$

←

$F'(x) = 0 \Rightarrow 2x(1 - \ln x^2) = 0$

$x = 0$ $\emptyset$ נפסל בגלל ת. ההגדרה

$\ln x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = e \Rightarrow x = \pm\sqrt{e}$

$F(\sqrt{e}) = \frac{\ln e}{e^2} = \frac{1}{e} \Rightarrow (\sqrt{e}; \frac{1}{e})$

$F(-\sqrt{e}) = \frac{\ln e}{e^2} = \frac{1}{e} \Rightarrow (-\sqrt{e}; \frac{1}{e})$

x	$x < -\sqrt{e}$	$-\sqrt{e}$	$-\sqrt{e} < x < 0$	0	$0 < x < \sqrt{e}$	$\sqrt{e}$	$x > \sqrt{e}$
סימן הנגזרת חלק הלכה – y'	$x=-e^2$ $+$	0	$x=-e^{\frac{1}{3}}$ $-$		$x=e^{\frac{1}{3}}$ $+$	0	$x=e$ $-$
מסקנה לגבי תחומי עלי׳ סימן הגרף – y	↗	max	↘		↗	min	↘

נקבע את סימן הנגזרת (שיפוע) ע״י הצבה במונה הנגזרת בלבד
כי מכנה הנגזרת חיובי לכל x בת. ההגדרה

$F'(-e^2) = \frac{-2e^2(1 - \ln e^2)}{(+)} = \frac{2e^2}{(+)} = (+)$

$F'(-e^{\frac{1}{3}}) = \frac{-2e^{\frac{1}{3}}(1 - \ln e^{\frac{2}{3}})}{(+)} = \frac{-2e^{\frac{1}{3}} \cdot (\frac{1}{3})}{(+)} = (-)$

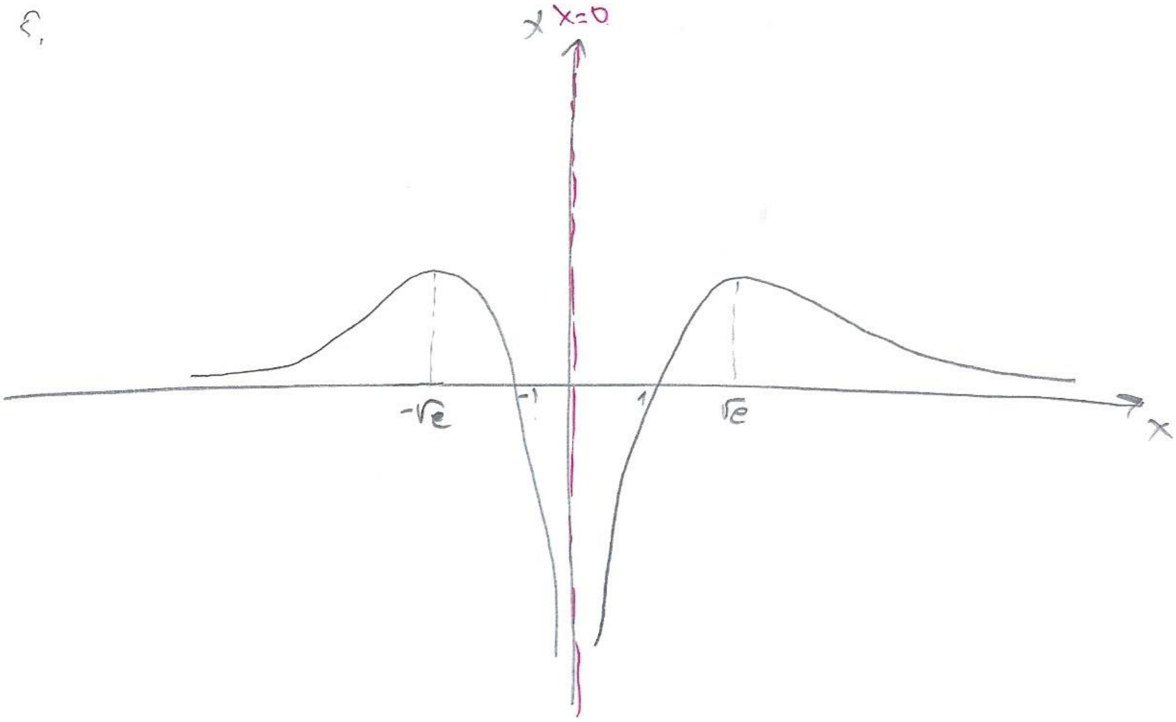
$F'(e^{\frac{1}{3}}) = \frac{2e^{\frac{1}{3}}(1 - \ln e^{\frac{1}{3}})}{(+)} = \frac{2e^{\frac{1}{3}} \cdot (\frac{2}{3})}{(+)} = (+)$

$F'(e) = \frac{2e(1 - \ln e^2)}{(+)} = -\frac{2e^2}{(+)} = (-)$

עפ״י ניתוח הנתונים בעזרת הטבלה

נ.ק. $\boxed{\begin{array}{c} max(-\sqrt{e}; \frac{1}{e}) \\ max(\sqrt{e}; \frac{1}{e}) \end{array}}$

ז.



ב) ע"פ הסרטוט

$f(x)>0$

$\boxed{x<-1 \text{ או } x>1}$

$f(x)<0$

$\boxed{-1<x<0 \text{ או } 0<x<1}$

ג) ע"פ סימן הנגזרת שבטבלה בסעיף א'

$\boxed{\text{גרף IV}}$ מש"ל