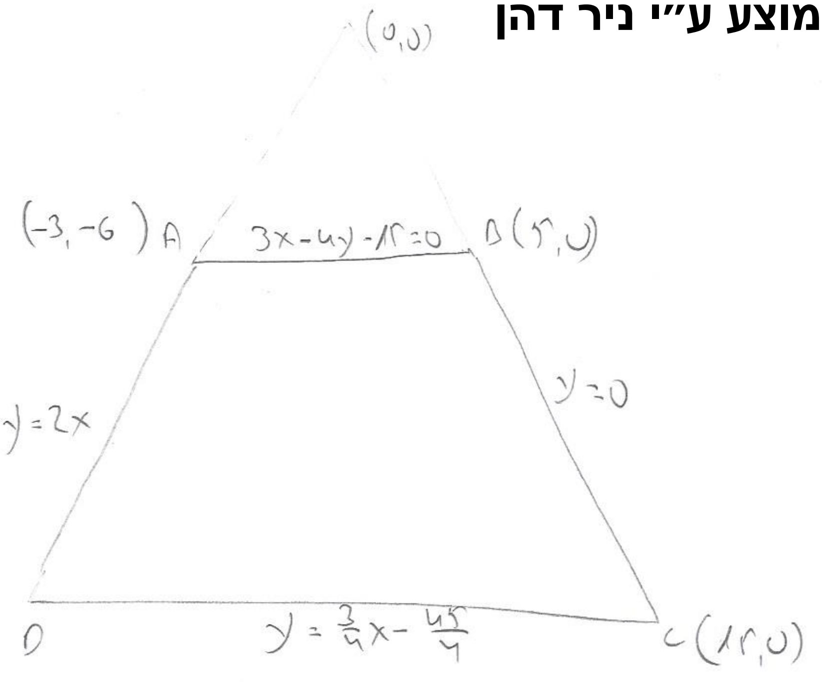
הפיתרון מוצע ע״י ניר דהן

רק מספר זהות
מועד א׳

(1)



הישר BC מונח על <u>החלק החיובי</u> של ציר ה-x

$y_{BC}=0$

נובע מהנתון 6 כי מרחק הנקודה C(x,0)
מהישר AB הוא 6

$$\frac{|3x-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=6 \Rightarrow |3x-15|=30$$

<u>מקרה א׳</u>

$3x-15=30$

$x=15$

$\boxed{C(15,0)}$

<u>מקרה ב׳</u>

$3x-15=-30$

$x=-5$ $\emptyset$ (לא מונח על החלק החיובי של ציר ה-x)

<u>מציאת נק׳ B</u>

$y=0$

$3x-4\cdot 0-15=0 \Rightarrow x=5$

$\boxed{B(5,0)}$

המשך

ישר AB

$3x-4y-15=0 \Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}$

$AB \parallel DC$ נתון

$\Rightarrow m_{AB}=m_{DC}=\frac{3}{4}$ (תא' ההגדרה.)

$C(15,0)$

$\Rightarrow y-0=\frac{3}{4}(x-15) \Rightarrow$ $\boxed{y_{DC}=\frac{3}{4}x-\frac{45}{4}}$

1/2 ת.ב.

$BC=x_C-x_B=15-5=10$

$\boxed{BC=R=10}$ נתון A ו C נמצאים על מעגל מרכזו B

ת.ב. ב.

$\Rightarrow AB=BC=10$

A נמצא על הישר $y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}$ נתון:

$A(x;\ \frac{3}{4}x-\frac{15}{4})$

$AB=10 \Rightarrow \sqrt{(x-5)^2+(\frac{3}{4}x-\frac{15}{4})^2}=10$ $/^2$

$x^2-10x+25+\frac{9x^2}{16}-\frac{90x}{16}+\frac{225}{16}=100$ $/\cdot 16$

$16x^2-160x+400+9x^2-90x+225=1600$

$25x^2-250x-975=0$ $/:25$

$x^2-10x-39=0$

$x_1=13$ $\emptyset$ (נתון A ברביע השלישי.)

$x_2=-3$

$\Rightarrow \boxed{A(-3;-6)}$

המשך

מציאת ישר AD

הישר AD עובר דרך ראשית הצירים $O(0,0)$

$$m_{AO} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{AD} = 2x}$$

מציאת קודקוד D

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{3}{4}x - \frac{45}{4} \end{cases}$$

$$2x = \frac{3}{4}x - \frac{45}{4}$$

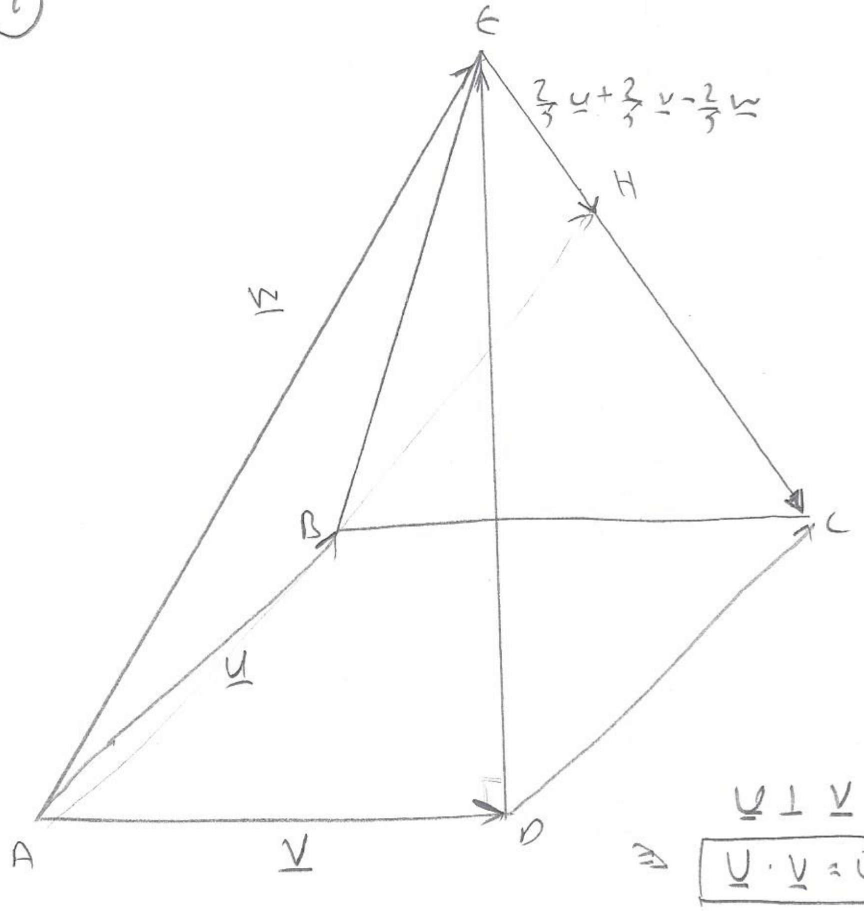
$$\frac{5}{4}x = -\frac{45}{4} \quad / : \frac{5}{4} \qquad \boxed{x = -9} \Rightarrow y = -18$$

$$\boxed{D(-9, -18)}$$

משך כ׳ 2

(7)

קיץ 2018 [illegible]
מועד א'



בסיס ריבוע $\underline{u} \perp \underline{v}$

$\Rightarrow \boxed{\underline{u}\cdot\underline{v}=0}$

נתון בסיס הפירמידה ריבוע שאורכו 5.

$|\underline{u}| = |\underline{v}| = 5 \Rightarrow \boxed{\underline{u}^2=\underline{v}^2=25}$

נתון $\vec{AD} \perp \vec{DE}$

$\vec{DE} = -\underline{v} + \underline{w}$

$\Rightarrow \vec{AD}\cdot\vec{DE} = 0 \Rightarrow \underline{v}(-\underline{v}+\underline{w}) = 0 \Rightarrow -\underline{v}^2+\underline{v}\,\underline{w}=0$

$\Rightarrow v^2 = \underline{v}\cdot\underline{w} \Rightarrow \boxed{\underline{v}\cdot\underline{w} = 25}$

מש"ל

$\cos\angle EAD = \frac{\vec{AE}\cdot\vec{AD}}{|\vec{AE}|\cdot|\vec{AD}|} = \frac{\underline{v}\cdot\underline{w}}{|\underline{v}|\cdot|\underline{w}|}$

$\cos\angle EAB = \frac{\vec{AE}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AE}|\cdot|\vec{AD}|} = \frac{\underline{u}\cdot\underline{w}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{w}|}$

המשך ←

$\measuredangle EAD = \measuredangle EAB$ (נתון)

$\Rightarrow \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|} = \frac{\underline{u} \cdot \underline{w}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{w}|} \Rightarrow \boxed{\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} = 25}$

מש

$\vec{EH} = \frac{3}{5} \vec{EC}$

$\vec{EC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$

$\Rightarrow \vec{EH} = \frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v} - \frac{2}{5}\underline{w}$

$|\vec{AH}| = 2\sqrt{17}$

$\vec{AH} = \underline{w} + \frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v} - \frac{2}{5}\underline{w} \Rightarrow \boxed{\vec{AH} = \frac{2}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v} + \frac{3}{5}\underline{w}}$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v} + \frac{3}{5}\underline{w}\right)^2} = 2\sqrt{17}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{4}{25}\underline{u}^2 + \frac{6}{25}\underline{u} \cdot \underline{w} + \frac{4}{25}\underline{v}^2 + \frac{6}{25}\underline{v}\underline{w} + \frac{6}{25}\underline{u} \cdot \underline{w} + \frac{6}{25}\underline{v} \cdot \underline{w} + \frac{9}{25}\underline{w}^2}$

$= 2\sqrt{17} \quad \uparrow^2$ הוכח $\boxed{\underline{u}^2 = \underline{v}^2 = \underline{v}\,\underline{w} = \underline{u}\,\underline{w} = 25}$

$4 + 6 + 4 + 6 + 6 + 6 + \frac{9}{25}\underline{w}^2 = 68$

$\frac{9}{25}\underline{w}^2 = 36 \Rightarrow \underline{w}^2 = 100 \Rightarrow \boxed{|\underline{w}| = 10}$

מש

ג) $\vec{DC} \cdot \vec{EC} = \underline{u} \cdot (\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}) =$

$= \underline{u}^2 + \underline{u} \cdot \underline{v} - \underline{u} \cdot \underline{w} = 25 + 0 - 25 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{DC} \perp \vec{EC}}$

$|\vec{DC}| = |\underline{u}| = 5$

$|\vec{EC}| = \sqrt{(\underline{u} + \underline{v} - \underline{w})^2} = \sqrt{\cancel{\underline{u}^2} - \cancel{\underline{u} \cdot \underline{w}} + \cancel{\underline{v}^2} - \cancel{\underline{v}\,\underline{w}} - \underline{u}\,\underline{w} - \underline{v}\,\underline{w} + \underline{w}^2}$

$= \sqrt{-25 - 25 + 100} = 5\sqrt{2}$

המשך ←

$$S_{\triangle EDC} = \frac{|\vec{DC}| \cdot |\vec{EC}|}{2} = \frac{5 \cdot 5\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$$

מש"ל ד1.

ד) $\vec{AD} \perp \vec{DE}$ נתון

$\vec{AD} \perp \vec{DC}$ נתון ריבוע

$\Rightarrow \vec{AD}$ הוא גובה הפירמידה. (ישר המאונך לשני ישרים במישור הנחתכים דרך נקודת חיתוכם מאונך למישור כולו.)

$$V = \frac{S_{\triangle ECD} \cdot |\vec{AD}|}{3} = \frac{\frac{25\sqrt{2}}{2} \cdot 5}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{125\sqrt{2}}{6}}$$

מש"ל ד2.

(3)

$$z^2 - 2R\,cis\theta \cdot z - 3R^2\,cis\,2\theta = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{2R\,cis\theta \pm \sqrt{4R^2\,cis\,2\theta + 12R^2\,cis\,2\theta}}{2}$$

$$= \frac{2R\,cis\theta \pm \sqrt{16R^2\,cis\,2\theta}}{2} = \frac{2R\,cis\theta \pm (16R^2\,cis\,2\theta)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$= \frac{2R\,cis\theta \pm 4R\,cis\theta}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= 3R\,cis\theta \\ z_2 &= -R\,cis\theta \end{aligned}}$$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ... z_2 ! z_1

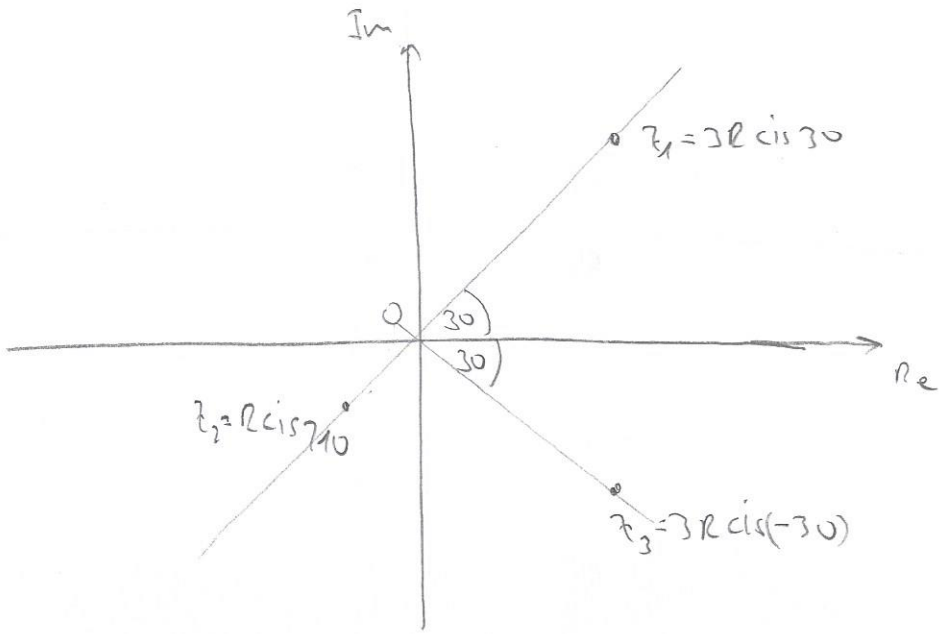
$$\Rightarrow m = tg\theta \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = tg\theta \Rightarrow \theta = 30^\circ + 180^\circ k$$

$$0 < \theta < 90$$

$$\boxed{\theta = 30^\circ}$$

$$z_3 = \overline{z_1} = 3R\,cis(-30)$$

$$z_2 = -R\,cis\,30 = R\,cis\,180 \cdot cis\,30 = R\,cis\,210$$



$S_{\Delta z_1 0 z_3} = 225\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{|z_1| \cdot |z_3| \cdot \sin 60}{2} = 225\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3R \cdot 3R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 225\sqrt{3} \Rightarrow \frac{9R^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 225\sqrt{3} \quad / : \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$R^2 = 100$$

(מ.ו) $R > 0 \Rightarrow \boxed{R = 10}$

$$\boxed{|z_2| = R = 10}$$

מ.ש.ל

קיץ 2016 807
מועד א'

(4) $f(x) = -3x^2 \cdot e^{x^3}$

(1) א) <u>מציאת נק' קיצון</u>

$f'(x) = -6x \cdot e^{x^3} - 3x^2 \cdot 3x^2 \cdot e^{x^3}$

$$\boxed{f'(x) = -e^{x^3}(6x + 9x^4)}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x + 9x^4 = 0$ $e^{x^3} > 0$ לכל x

$3x(2 + 3x^3) = 0$

$x_1 = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$

$x^3 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{2}{3}} = -0.87$

$f(-0.87) = -3 \cdot (-0.87)^2 e^{(-0.87)^3} = -1.16 \Rightarrow (-0.87, -1.16)$

x	$x < -0.87$	-0.87	$-0.87 < x < 0$	0	$x > 0$
סימן הנגזרת f'	$x=-1$ −		$x=-0.5$ +		$x=1$ −
f	↘	min	↗	max	↘

$e^{x^3} > 0$ לכל x לכן לגבי סימן הנגזרת (שיפוע) נקבע בביטוי שבסוגריים

$f'(-1) = (-)(+) \cdot (-6 + 9) < 0$

$f'(-0.5) = (-) \cdot (+) \cdot (-3 + 0.5625) > 0$

$f'(1) = (-)(+) \cdot (6 + 9) < 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \min(-0.87, -1.16) \\ \max(0,0) \end{array}}$$

המשך ←

ג) חיתוך עם ציר x

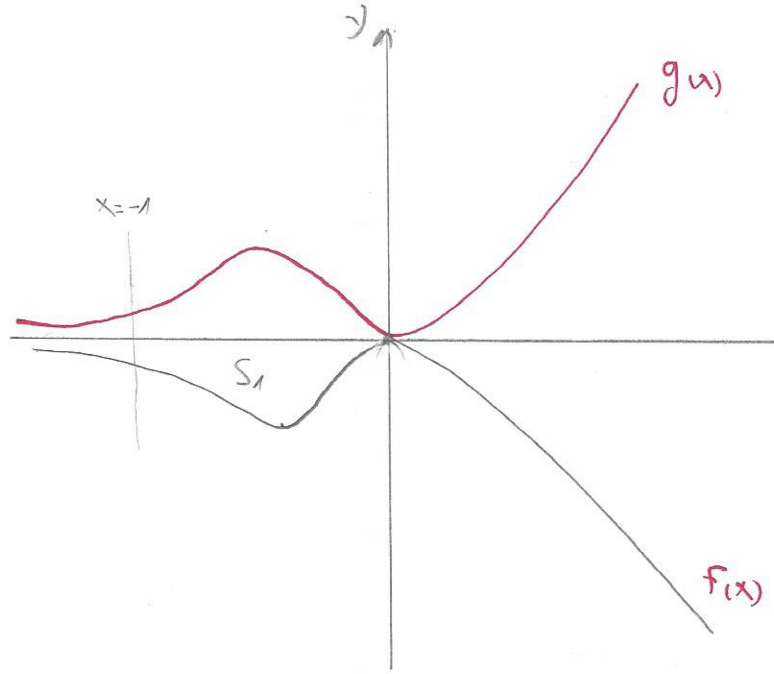
$y=0 \Rightarrow -3x^2 \cdot e^{x^3}=0$ $(e^{x^3}>0)$

$x=0 \Rightarrow$ **$(0,0)$**

חיתוך עם ציר y

$x=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow$ **$(0,0)$**

ד)



ה) $g(x)=|f(x)|$ (רק ערכי הפונ' $f(x)$ נעשים ערכים חיוביים עבור כל x)

ו) ציר ה-x הוא ציר הסימטריה של השטח לכן נחשב ונכפיל ב-2

$$S_1=\int_{-1}^{0}\left[0-(-3x^2 \cdot e^{x^3})\right]dx=\int_{-1}^{0}3x^2 \cdot e^{x^3}dx=\left[e^{x^3}\right]_{-1}^{0}$$

$$=e^0-(e^{-1})=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}\approx 0.632$$ יח'

$S=2\cdot 0.632 = 1.26$ יח'

מ"ר

c) $h(a) = \int_{-1}^{a} -3x^2 \cdot e^{x^3} dx = \left[-e^{x^3}\right]_{-1}^{a} = -e^{a^3} - \left(-e^{-1}\right)$

$$\boxed{h(a) = -e^{a^3} + \frac{1}{e}}$$

$$t(a) = \int_{-1}^{a} 3x^2 e^{x^3} dx = \left[e^{x^3}\right]_{-1}^{a} = e^{a^3} - e^{-1}$$

$$\boxed{t(a) = e^{a^3} - \frac{1}{e}}$$

$h(a) = t(a)$

$$\Rightarrow -e^{a^3} + \frac{1}{e} = e^{a^3} - \frac{1}{e} \Rightarrow 2 \cdot e^{a^3} = 2 \cdot e^{-1} \quad | : 2$$

$$e^{a^3} = e^{-1} \Rightarrow a^3 = -1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$t(-1) = e^{-1} - e^{-1} = 0$

$$\boxed{(-1;\ 0)}$$

קיץ 2016 807
מועד ב'

(1) $f(x) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln x\right)$

א) 1) תחום הגדרה

$\boxed{x > 0}$

2) <u>חיתוך עם ציר x</u>

$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln x\right) = 0$

$\frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \emptyset$ (נקודה מחוץ לתחום הגדרה)

$\frac{1}{2} - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e} \Rightarrow \boxed{(\sqrt{e};\ 0)}$

חיתוך עם ציר y לא קיים
כי $x > 0$

3) <u>נקודות קיצון</u>

$f'(x) = x \cdot \left(\frac{1}{2} - \ln x\right) + \frac{x^2}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$

$= \frac{x}{2} - x\ln x - \frac{x}{2}$

$\boxed{f'(x) = -x\ln x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x\ln x = 0 \qquad x > 0$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln 1\right) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \left(1;\ \frac{1}{4}\right)$

$f''(x) = -\left[\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] \Rightarrow \boxed{f''(x) = -\ln x - 1}$

$f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow \boxed{\max\left(1;\ \frac{1}{4}\right)}$

קצה!

המשך

ב) 1) עבור הנגזרת של $f(x)$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -\ln x - 1 = 0$$

$$\ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}\cdot \ln e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\left(\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$$

$$\boxed{f'''(x) = -\frac{1}{x}}$$

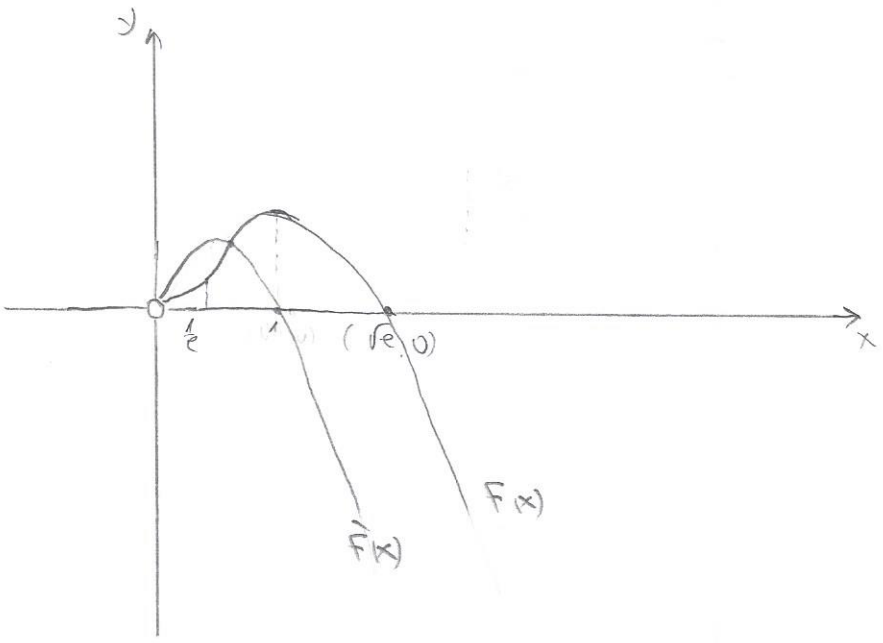
$$f'''\left(\frac{1}{e}\right) = -e < 0 \Rightarrow \boxed{\max\left(\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)}$$

ב) 2) עבור הנגזרת של $F(x)$

$$F''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e^2}$$

$$F'''(x) \neq 0 \Rightarrow F\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{\frac{1}{e^2}}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln e^{-1}\right) = \frac{1}{2e^2}\cdot\frac{3}{2}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{e}; \frac{3}{4e^2}\right)}$$ נקודת כיפוף



ב) 3) עבור התחום שבו $\frac{1}{2} < x < 1$

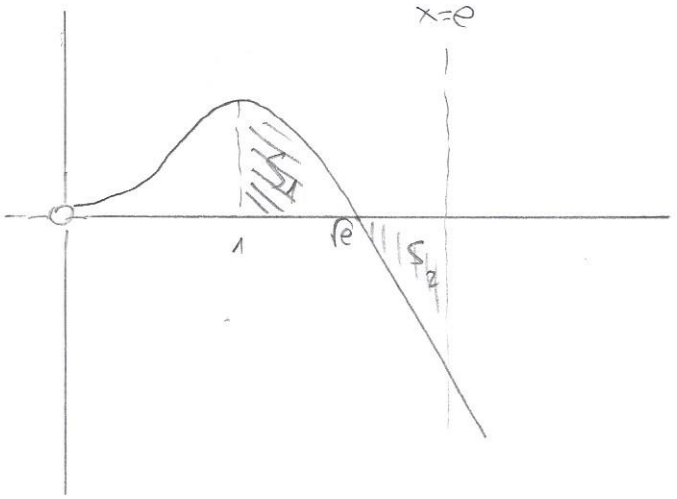
המשך ←

3) $g'(x) = f(x)$

$g(1) = a$

$g(\sqrt{e}) = b$

$g(e) = c$



$$S_1 = \int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} g'(x)\,dx = \left[g(x)\right]_1^{\sqrt{e}} = g(\sqrt{e}) - g(1) = \underline{\underline{b-a}}$$

$$S_2 = \int_{\sqrt{e}}^{e} -f(x)\,dx = \int_{\sqrt{e}}^{e} -g'(x)\,dx = \left[-g(x)\right]_{\sqrt{e}}^{e} = -g(e) - \left(-g(\sqrt{e})\right) = -c+b$$

$$\boxed{S = S_1 + S_2 = -a + 2b - c}$$

R.!